Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
14. Juni 2006

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Gruppenübungen

G22 a) Jede zulässige Lösung z von

$$\text{(1)} \qquad \min\left\{\sum_{j\in N}(1-x_j^*)z_j \mid \sum_{j\in N} a_j z_j > b,\ z\in\{0,1\}^n\right\}$$

entspricht offensichtlich einem Cover C mit $i\in C$, falls $z_i = 1$.

(i) z^R definiert einen Cover R. Es gilt

$$\sum_{j\in R}(1-x_j^*) = w < 1 \Leftrightarrow \sum_{j\in R} x_j^* > |R| - 1.$$

(ii) Sei C ein beliebiger Cover. Da z^C mit

$$z_i^C \begin{cases} 1, & \text{falls } i\in C,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

eine zulässige Lösung von (1) ist, gilt

$$1 \le w \le \sum_{j\in C}(1-x_j^*) \Leftrightarrow \sum_{j\in C} x_j^* \le |C| - 1.$$

b) Betrachte das ganzzahlige Programm

$$w = \min\left\{z_1 + z_2 + \frac{1}{4}z_3 + \frac{1}{2}z_4 + z_6 \mid 45z_1 + 46z_2 + 79z_3 + 54z_4 + 53z_5 + 125z_6 > 178,\ z\in\{0,1\}^6\right\}.$$

Die Optimallösung ist $z^R = (0,0,1,1,1,0)$ mit $w = \frac{3}{4}$. Also wird die Cover-Ungleichung

$$x_3 + x_4 + x_5 \le 2$$

um $1 - w = \frac{1}{4}$ von x^* verletzt.

G23 Die Gültigkeit der Ungleichung für $P(G)$ ist klar.

„ $\Rightarrow$ “:

Sei C eine Clique in G, die nicht maximal ist, d. h. es existiert eine Clique $\tilde{C}$ in G mit $C \subsetneq \tilde{C}$.

Dann gilt:

$$\sum_{i\in C} x_i \le \sum_{i\in\tilde{C}} x_i \le 1,$$

und die zu C gehörige Ungleichung definiert offensichtlich keine Facette von $P(G)$.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei C eine maximale Clique von G. Definiere $F := \left\{x\in P(G) \mid \sum_{i\in C} x_i = 1\right\}$. Sei $b^{\mathrm{T}}x \le \beta$ eine facettendefinierende Ungleichung mit $F \subseteq F_b := \{x\in P(G) \mid b^{\mathrm{T}}x = \beta\}$.

Es gilt

- für $k\in C$:

$$e_k \in F \Rightarrow e_k \in F_b \Rightarrow b_k = \beta$$

- für $l\notin C$ existiert ein $k\in C$ mit $(k,l)\notin E$ (sonst wäre C nicht maximal):

$$e_k + e_l \in F \Rightarrow e_k + e_l \in F_b \Rightarrow b_k + b_l = \beta \Rightarrow b_l = 0.$$

Somit ist $b^{\mathrm{T}}x \le \beta$ ein positives Vielfaches der Cliquen-Ungleichung. Damit ist F Facette von $P(G)$.