Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
7. Juni 2006

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Gruppenübungen

G19 Für die Nebenbedingung (1) muss

$$x_2 + x_3 \geq 1$$

erfüllt sein.

Für die Nebenbedingung (3) muss

$$x_3 \leq x_2$$

gelten. (Wären $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ gleichzeitig erlaubt, würde $6 \leq 5$ (für $x_1 = 0$) bzw. $8 \leq 5$ (für $x_1 = 1$) folgen.)

Kombinieren wir diese beiden Bedingungen, erhalten wir

$$x_2 = 1.$$

Damit wird (1) redundant.

Die beiden übrigen Nebenbedingungen werden zu

$$\begin{array}{rrcrl} -4x_1 & -3x_3 & \leq & -3 & (2') \\ 2x_1 & +6x_3 & \leq & 7 & (3') \end{array}$$

Für (3') muss

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

gelten.

Für (2') muss

$$x_1 + x_3 \geq 1$$

gelten.

Damit gilt

$$x_1 + x_3 = 1.$$

Folglich ist die Optimallösung

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0).$$

G20 Behauptung:

$$\alpha_t = \min_{k=1,\ldots,u_t} \frac{\alpha - w_k}{k},$$

wobei

$$\begin{aligned} w_k = \quad \max \quad & \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \\ \text{s. t.} \quad & A_{\cdot I} x_I \leq b - A_{\cdot t} k \\ & 0 \leq x_I \leq u_I \\ & x_I \in \mathbb{Z}^{|I|}. \end{aligned}$$

Beweis:

- Falls $x_t = 0$:
  (1) ist gültig für alle Werte von α_t.

- Falls $x_t = k$ mit $k \in \{1, ..., u_t\}$ beliebig:

$$\begin{aligned} & \text{(1) ist gültige Ungleichung} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_t k + \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \leq \alpha \quad \text{ist gültig für alle } 0 \leq x_I \leq u_I,\ x_I \in \mathbb{Z}^{|I|},\ \text{die } A_{.I} x_I \leq b - A_{.t} k \text{ erfüllen} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_t k + \max \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \mid A_{.I} x_I \leq b - A_{.t} k,\ 0 \leq x_I \leq u_I,\ x_I \in \mathbb{Z}^{|I|} \right\} \leq \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_t \leq \frac{\alpha - w_k}{k} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} w_k = \quad & \max \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \\ & \text{s. t.} \quad A_{.I} x_I \leq b - A_{.t} k \\ & \qquad\quad 0 \leq x_I \leq u_I \\ & \qquad\quad x_I \in \mathbb{Z}^{|I|}. \end{aligned}$$

Es muss somit gelten:

$$\alpha_t \leq \frac{\alpha - w_k}{k}$$

für $k = 1, ..., u_t$.

Daraus folgt die Behauptung.

G21 O.b.d.A. können wir von $k_i = 1$ ausgehen (warum?). Im schlimmsten Fall müssen wir jede Länge α_j, $1 \leq j \leq n$, von einem neuen Stab abschneiden (dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn alle Längen α_j, $1 \leq j \leq n$ größer als $\frac{b}{2}$ sind). Daher brauchen wir n Binärvariablen $s_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$, wobei $s_i = 1$ genau dann, wenn Stab i genutzt wird.

Die Binärvariable x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ sei genau dann 1, wenn die j-te Länge vom i-ten Stab abgeschnitten werden soll. Damit erhalten wir folgende Nebenbedingungen:

- Jede Länge α_j, $1 \leq j \leq n$, muss von irgend einem Stab abgeschnitten werden:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

- Die Summe der Längen, die von einem Stab geschnitten werden, darf die Länge des Stabes nicht überschreiten:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} \leq b \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

- Wenn irgend eine Länge α_j von Stab i geschnitten wird, ist Stab i benutzt (oder, die logische Negation davon, wenn Stab i nicht benutzt wird, kann auch keine Länge von ihm geschnitten werden):

$$x_{ij} \leq s_i \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$$

Ziel ist es, so wenig Stäbe wie möglich anzuschneiden:

$$\min \sum_{i=1}^{n} s_i$$