Diskrete Optimierung II

SS 2006

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
31. Mai 2006

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Gruppenübungen

G16 a) Wir bestimmen zunächst ein TDI-Ungleichungssystem $A_k x \leq b_k$, welches P_k beschreibt (vgl. Beweis von Satz 2.37).

Eine irredundante Beschreibung von P_k ist gegeben durch $\tilde{A}_k x \leq \tilde{b}_k$ mit

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -k & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Ecken von P_k sind gegeben durch

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ F_3 = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$$

mit

$$\mathrm{eq}(F_1) = \{2,3\},\ \mathrm{eq}(F_2) = \{1,3\},\ \mathrm{eq}(F_3) = \{1,2\}.$$

Wir bestimmen nun ganzzahlige Hilbert-Basen H_i der Kegel $C((\tilde{A}_k)_{\mathrm{eq}(F_i)})$:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ H_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ H_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, j = -k, ..., k \right\}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich A_k und b_k aus folgenden Ungleichungen:

$$\begin{array}{rrcll} -x_1 & & \leq & 0 & \\ & -x_2 & \leq & 0 & \\ x_1 & & \leq & 1 & \\ jx_1 & +x_2 & \leq & \frac{j+k}{2} & (j = -k, ..., k). \end{array}$$

Nach Satz 3.6 im Skript wird P_k^1 durch die Ungleichungen

$$\begin{array}{rrcll} -x_1 & & \leq & 0 & \qquad (1) \\ & -x_2 & \leq & 0 & \qquad (2) \\ x_1 & & \leq & 1 & \qquad (3) \\ jx_1 & +x_2 & \leq & \left\lfloor \frac{j+k}{2} \right\rfloor & (j = -k, ..., k). \quad (4^{(j)}) \end{array}$$

beschrieben.

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung (3) und die Ungleichungen (4) für $j \neq k-1$ redundant sind. Dabei gelte o.B.d.A. $k > 1$.

- Ungleichung (3) läßt sich folgendermaßen aus anderen Ungleichungen des Systems darstellen:

$$(3) = \frac{1}{k-1} \cdot (2) + \frac{1}{k-1} \cdot (4^{(k-1)}).$$

- Für die Darstellung der Ungleichungen $(4^{(j)})$ mit $j \neq k-1$ unterscheiden wir
  Fall 1: $j \geq 0$
  Wir betrachten das System

$$\begin{array}{rrcll} (k-1)x_1 & +x_2 & \leq & k-1 & (4^{(k-1)}) \\ -(k-1)x_1 & +x_2 & \leq & 0 & (4^{(-(k-1))}) \\ & -x_2 & \leq & 0 & (2). \end{array}$$

  Dann ergibt sich für $j \neq k-1$ durch

$$\frac{\left\lfloor \frac{j+k}{2} \right\rfloor}{k-1} \cdot (4^{(k-1)}) + \frac{\left\lfloor \frac{j+k}{2} \right\rfloor - j}{k-1} \cdot (4^{(-(k-1))}) + \left(\frac{2\left\lfloor \frac{j+k}{2} \right\rfloor - j}{k-1} - 1 \right) \cdot (2)$$

  die Ungleichung

$$jx_1 + x_2 \leq \left\lfloor \frac{j+k}{2} \right\rfloor, \quad \text{also } (4^j).$$

  Fall 2: $j \leq 0$
  wird analog behandelt.

b) Es gilt $P_k^k = (P_k)_I$, also $t = k$. Hingegen beträgt die Kodierungslänge der Eingabe (A, b) $\mathcal{O}(\log k)$.

G17 a) Sei $(x, y) \in P_1$ beliebig, d. h. $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{Z}$, $x + y \geq b$.
Fall 1: $y \geq \lceil b \rceil$
klar, da für alle $x \in P_1$ gilt: $x \geq 0 \geq f(\lceil b \rceil - y)$.
Fall 2: $y < \lceil b \rceil$
Wegen $y \in \mathbb{Z}$ gilt $y \leq \lfloor b \rfloor$. Damit

$$\begin{array}{rcl} x & \geq & b - y \\ & = & f + \underbrace{\lfloor b \rfloor - y}_{\geq 0} \\ & \geq & f + f(\lfloor b \rfloor - y) \\ & = & f(1 + \lfloor b \rfloor - y) \\ & = & f(\lceil b \rceil - y). \end{array}$$

b) Es gilt $y \leq b + x \Leftrightarrow x - y \geq -b$.
Weiterhin:

$$\begin{array}{rcl} -b - \lfloor -b \rfloor & = & -b - (-\lceil b \rceil) \\ & = & -b + \lceil b \rceil \\ & = & 1 - b + \lfloor b \rfloor \\ & = & 1 - f. \end{array}$$

Mit dem Ergebnis aus Teil a) folgt die Gültigkeit der Ungleichung

$$x \geq (1-f)(-\lceil b \rceil + y) \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{1-f} - \lceil -b \rceil = \frac{x}{1-f} + \lfloor b \rfloor$$

für P_2.

G18 „ $\Rightarrow$ “: Sei G bipartit mit Knotenpartition $V = S \dot{\cup} T$. Sei $C = (v_1, v_2, ...v_n, v_1)$ ein geschlossener Pfad in G, und sei o.B.d.A. $v_1 \in S$. Weil es innerhalb von S bzw. T keine Kanten gibt, muss $v_{2k} \in T$ und $v_{2k+1} \in S$ für $k = 1, ..., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ gelten. Um $v_1 \in S$ zu erhalten, muss $v_n \in T$ gelten, also muss n gerade sein. Folglich kann G keine Kreise ungerader Länge enthalten.

„ $\Leftarrow$ “: Sei G ein Graph, welcher keinen ungeraden Kreis enthält. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass G zusammenhängend ist. Für einen Knoten $x_0 \in V$ sei S die Menge aller Knoten x mit geradem Abstand von x_0 und $T = V \backslash S$. Angenommen, es gäbe eine Kante $\{x, y\} \in E$, so dass $x, y \in S$. Seien W_x und W_y kürzeste Wege von x_0 nach x bzw. y. Aufgrund der Definition von S haben W_x und W_y gerade Länge. Sei ferner z der letzte gemeinsame Knoten von W_x und W_y (welche beide in x_0 beginnen), und bezeichne die verbleibenden Wege, welche von z nach x bzw. y führen, mit W'_x bzw. W'_y. Dann ist der Weg $x - (W'_x) \rightarrow z - (W'_y) \rightarrow y - \{x, y\} \rightarrow x$ ein Kreis ungerader Länge in G. Widerspruch zur Annahme.
Analog lässt sich zeigen, dass G keine Kante $\{x, y\}$ mit $x, y \in T$ enthält.
Somit ist $S \dot{\cup} T$ eine Partition von V, wobei es keine Kanten innerhalb von S und T gibt, und folglich ist G bipartit.