Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
24. Mai 2006

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Gruppenübungen

G13 Wir bestimmen ein TDI-Ungleichungssystem $Ax \leq b$, welches P beschreibt, analog zum Beweis von Satz 2.37.

Offensichtlich ist $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine irredundante Beschreibung von P.

Die Ecken (0-dimensionale Seitenflächen) von P sind gegeben durch

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \; F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \; F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

mit

$$\mathrm{eq}(F_1) = \{1,2\}, \; \mathrm{eq}(F_2) = \{1,3\}, \; \mathrm{eq}(F_3) = \{2,3\}.$$

Wir bestimmen nun ganzzahlige Hilbert-Basen H_i der Kegel $C(\tilde{A}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{eq}(F_i),\cdot})$:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ H_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ H_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten nun ein TDI-System $Ax \leq b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \max\{-2x_1 + x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{-x_1 \mid x \in P\} \\ \max\{-x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{-x_1 + x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{x_1 + x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{2x_1 + x_2 \mid x \in P\} \\ \max\{x_1 \mid x \in P\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

G14 „$\Rightarrow$: “ Sei H eine Stützhyperebene von P. Dann ist $F := P \cap H \neq \emptyset$ eine Seitenfläche von P und enthält somit eine minimale Seitenfläche von P. Nach Voraussetzung enthält H einen ganzzahligen Punkt.

„$\Leftarrow$: “ P habe die Form $P = P(A, b)$.

<u>Annahme:</u> Es existiert eine minimale Seitenfläche F von P mit $F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Es gilt $F = \{x \in P \mid A_{\mathrm{eq}(F)}x = b_{\mathrm{eq}(F)}\}$.

- Wir zeigen zunächst: $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathrm{eq}(F)}x = b_{\mathrm{eq}(F)}\}$:
  „$\subseteq$ “: klar.

„ $\supseteq$ “: Angenommen, es existiere $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A_{\text{eq}(F)}x = b_{\text{eq}(F)}$, $x \notin P$, dann gibt es $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^{\mathrm{T}}x \leq \alpha\}$ und $\tilde{F} := F \cap \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^{\mathrm{T}}x \leq \alpha\} \neq \emptyset$ ist eine Seitenfläche von P mit $\dim(\tilde{F}) < \dim(F)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von F.

– Nun gilt nach Satz 2.27:

$$\exists y \in \mathbb{Q}^{|\text{eq}(F)|}$$

mit

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{T}}A_{\text{eq}(F)} &\in \mathbb{Z}^n, \\ y^{\mathrm{T}}b_{\text{eq}(F)} &\notin \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Definiere $c := y^{\mathrm{T}}A_{\text{eq}(F)}$ und $\gamma := y^{\mathrm{T}}b_{\text{eq}(F)}$. Dann ist

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^{\mathrm{T}}x = \gamma\}$$

eine Stützhyperebene von P, die jedoch keinen ganzzahligen Punkt enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

G15 Sei $G = (V, E)$ mit Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $T \subseteq E$ eine Kantenmenge, welche einen minimalen aufspannenden Baum von G beschreibt.

Wir führen für $e \in E$ folgende Binärvariablen ein:

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{falls Kante } e \in T, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Gewicht von T soll minimiert werden; also lautet die Zielfunktion

$$\min \sum_{e \in E} c(e)x_e.$$

Zur Formulierung der Nebenbedingungen benutzen wir folgende Charakterisierung: Ein aufspannender Baum eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein ayzklischer Subgraph von G mit $|V| - 1$ Kanten. Dann lauten die Nebenbedingungen

- T enthält genau $|V| - 1$ Kanten:
$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1$$
- T enthält keine Kreise:
$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq |U| - 1 \quad \forall\, \emptyset \neq U \subseteq V,$$
wobei $E(U)$ für $U \subseteq V$ diejenige Menge von Kanten bezeichnet, deren beide Endpunkte in U liegen.