Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
17. Mai 2006

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Gruppenübungen

G10 Die zweite Ungleichung von System (1) ist redundant; man erhält sie durch Addition der beiden übrigen Ungleichungen. Somit wird durch die Systeme (1) und (2) das selbe Polyeder definiert.

- Behauptung: System (1) ist TDI.
  Beweis:
  Sei $c \in \mathbb{Z}^2$ beliebig. Nach Definition 2.29 müssen wir zeigen, dass

$$\begin{array}{lcl} \min & 0 & \\ \text{s. t.} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (*) \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array}$$

  von einem ganzzahligen Punkt y angenommen wird, sofern das Minimum endlich ist. Das obige Gleichungssystem (*) hat die Lösungen

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Somit ist das obige Optimierungsproblem lösbar, und es kann eine ganzzahlige Lösung angegeben werden.

- Behauptung: System (2) ist nicht TDI.
  Beweis:
  Wähle $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$. Betrachte

$$\begin{array}{lcl} \min & 0 & \\ \text{s. t.} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & y_1, y_2 & \geq 0. \end{array}$$

  Die eindeutige Lösung dieses Optimierungsproblems ist

$$y^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}^2.$$

  Also ist System (2) nicht TDI.

G11 Definiere

$$P_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^{\mathrm{T}} x \leq \alpha\}$$

und

$$P_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} a^{\mathrm{T}} x \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Wir zeigen:

(i) $(P_2)_I \subseteq (P_1)_I$

(ii) $(P_1)_I \subseteq P_2$

(iii) $P_2 = (P_2)_I$.

- zu (i):
  Es gilt $P_2 \subseteq P_1$ wegen $\frac{1}{k}a^{\mathrm{T}}x \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \quad \Rightarrow \quad a^{\mathrm{T}}x \leq k \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \leq \alpha$. Damit gilt auch $(P_2)_I \subseteq (P_1)_I$.
- zu (ii):
  Sei $x \in (P_1)_I$. Sei o. B. d. A x ganzzahlig.
  Angenommen, $x \notin P_2$, also
  $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k} x_i > \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor .$$
  Dann gilt
  $$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k} x_i \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{k \cdot \left(\left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor + 1 \right)}_{>\alpha} \leq a^{\mathrm{T}}x \\ \Rightarrow \quad & a^{\mathrm{T}}x > \alpha. \end{aligned}$$
  Widerspruch zu $x \in (P_1)_I$.
- zu (iii): Wir zeigen, dass jede minimale Seitenfläche von P_2 ganzzahlige Punkte enthält.
  P_2 ist ein Halbraum, also ist
  $$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} a^{\mathrm{T}}x = \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}$$
  die einzige minimale Seitenfläche von P_2.
  Nach Satz 2.27 gilt nun entweder
  $$(1) \quad \exists x \in \mathbb{Z}^n: \; a^{\mathrm{T}}x = \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor$$
  oder
  $$(2) \quad \exists y \in \mathbb{Q}: \; ya \in \mathbb{Z}^n, \; y \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \notin \mathbb{Z}.$$
  Wir zeigen, dass (2) nicht gilt.
  Angenommen, es gibt ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $y \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt $y \notin \mathbb{Z}$, weil $\left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $ya \notin \mathbb{Z}^n$ (wegen $a \in \mathbb{Z}^n$).
  Also hat (2) keine Lösung, und folglich muss (1) gelten.

G12 Die Menge $J := \{1, ..., 27\}$ bezeichne die Positionen für die kleinen Würfel in dem großen Würfel. Zu jeder dieser Positionen führen wir eine Binärvariable $b_j,\; j \in J$ ein mit
$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{falls Position } j \text{ von einem schwarzen Würfel besetzt ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Mit der Menge $L := \{c_1, c_2, c_3 \mid c_i \in J,\; c_1, c_2, c_3 \text{ liegen in einer Linie}\}$ bezeichnen wir die Linien in dem großen Würfel. Es ist $|L| = 49$. Zu jedem $l = (c_{l,1}, c_{l,2}, c_{l,3}) \in L$ führen wir eine Binärvariable x_l ein mit
$$x_l = \begin{cases} 1, & \text{falls alle Würfel in Linie } l \text{ die selbe Farbe haben} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Wir wollen die Anzahl der Linien, welche mit gleichfarbigen Würfeln besetzt sind, minimieren:
$$\min \sum_{l \in L} x_l$$
Folgende Nebenbedingungen müssen eingehalten werden:

- Es gibt 14 schwarze Würfel:
$$\sum_{j \in J} b_j = 14.$$
- Kopplung der x- an die b-Variablen: Besteht Linie l nicht nur aus Würfeln einer Farbe (d. h. $x_l = 0$), muss die Anzahl schwarzer Würfel in dieser Linie 1 oder 2 betragen, also $1 \leq \sum_{j \in l} b_j \leq 2$. Liegen in Linie l hingegen nur Würfel der selben Farbe, gilt $\sum_{j \in l} b_j \in \{0, 3\}$, also insbesondere $0 \leq \sum_{j \in l} b_j \leq 3$. In diesem Fall muss x_l auf 1 gesetzt werden.
  Diese Bedingungen lassen sich wie folgt formulieren:
$$\forall l \in L: \; 1 - x_l \leq \sum_{j \in l} b_j \leq 2 + x_l.$$