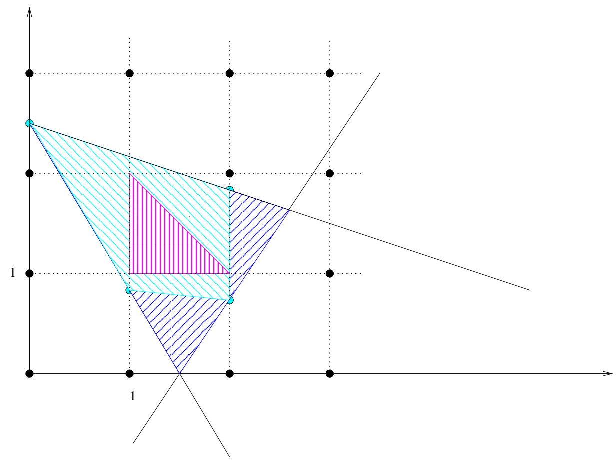
Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
10. Mai 2006

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Gruppenübungen

G7 a) /b)

Zunächst skizzieren wir P. Die Ecken von $P_{I,1}$ erhalten wir, indem wir die Geraden, welche P begrenzen, mit den Geraden $x_1 = k,\ k \in \mathbb{Z}$ schneiden. $P_I = P_{I,2}$ ist die konvexe Hülle der in P (und $P_{I,1}$) enhaltenen ganzzahligen Punkte.



c) Wir betrachten das Ungleichungssystem, welches P beschreibt:

$$\begin{array}{rrcrl} -10x_1 & -6x_2 & \leq & -15 & (1.) \\ 2x_1 & +6x_2 & \leq & 15 & (2.) \\ 6x_1 & -4x_2 & \leq & 9 & (3.). \end{array}$$

Aus der Skizze kann man erkennen, dass (1.) und (2.) auch Facetten von $P_{I,1}$ sind.
Weiterhin ist $x_1 \leq 2$ eine Facette von $P_{I,1}$. Für die übrige Facette ermitteln wir die benötigten Schnittpunkte von (1.)-(3.) mit den Geraden $x_1 = k,\ k \in \mathbb{Z}$:

- Schnittpunkt von (1.) mit $x_1 = 1$: $(1, \frac{5}{6})$
- Schnittpunkt von (3.) mit $x_1 = 2$: $(2, \frac{3}{4})$

Die Gleichung der Geraden durch diese beiden Punkte lautet: $x_1 + 12x_2 = 11$.
Also wird $P_{I,1}$ beschrieben durch das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} -10x_1 & -6x_2 & \leq & -15 \\ 2x_1 & +6x_2 & \leq & 15 \\ x_1 & & \leq & 2 \\ -x_1 & -12x_2 & \leq & -11. \end{array}$$

Wir entnehmen aus der Skizze dass $P_{I,2}$ durch drei Geraden durch die Punkte
(1.) $(1,1)$ und $(1,2)$,
(2.) $(1,1)$ und $(2,1)$,
(3.) $(1,2)$ und $(2,1)$
begrenzt wird.
$P_{I,2}$ wird also beschrieben durch das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & & \leq & -1 \\ & -x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & +x_2 & \leq & 3. \end{array}$$

G8 Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Größe k der Untermatrix B von A.

- $k = 1$: $\det B \in \{0, \pm 1\}$, da A nur Einträge in $\{0, \pm 1\}$ hat.
- $k \to k+1$: Angenommen, B hat eine Spalte mit nur einem von Null verschiedenem Eintrag. Entwickelt man $\det B$ nach dieser Spalte, so folgt $\det B \in \{0, \pm 1\}$ mittels Induktionsvoraussetzung. Ansonsten können wir voraussetzen, dass alle Spalten von B genau eine 1 und genau eine -1 als Eintrag haben. Dann ist die Summe aller Zeilenvektoren von B linear abhängig, d. h. $\det B = 0$.

G9 (a) Es sei $S_i \subseteq S_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y \in {S_j}^\circ \\ \Rightarrow\ & \forall x \in S_j :\ y^{\mathrm{T}} x \leq 0 \\ \Rightarrow\ & \forall x \in S_i :\ y^{\mathrm{T}} x \leq 0 \\ \Rightarrow\ & y \in {S_i}^\circ . \end{aligned}$$

(b) Sei $x \in S$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & x \in S \\ \Rightarrow\ & \forall y \in S^\circ :\ y^{\mathrm{T}} x \leq 0 \\ \Rightarrow\ & \forall y \in S^\circ :\ x^{\mathrm{T}} y \leq 0 \\ \Rightarrow\ & x \in S^{\circ\circ} . \end{aligned}$$

(c) Sei $y \in \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i \right)^\circ$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & y \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i \right)^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i :\ y^{\mathrm{T}} x \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in S_i :\ y^{\mathrm{T}} x \leq 0 \quad \text{für } i = 1, ..., k \\ \Leftrightarrow\ & \forall i = 1, ..., k : y \in {S_i}^\circ \\ \Leftrightarrow\ & y \in \bigcap_{i=1}^{k} {S_i}^\circ . \end{aligned}$$

(d) $\underline{S^\circ = \mathrm{cone}(S^\circ)}$:

„ $\subseteq$ “: klar.

„ $\supseteq$ “: Sei $y \in \mathrm{cone}(S^\circ)$ beliebig mit $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in S^\circ$. Sei ferner $z \in S$ beliebig. Dann gilt $y^{\mathrm{T}} z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{{x_i}^{\mathrm{T}} z}_{\leq 0} \leq 0$, also $y \in S^\circ$.

$\underline{S^\circ = (\mathrm{cone}(S))^\circ}$:

„ $\supseteq$ “: $S \subseteq \mathrm{cone}(S) \Rightarrow (\mathrm{cone}(S))^\circ \subseteq S^\circ$ (siehe (a)).

„ $\subseteq$ “: Sei $y \in S^\circ$ beliebig. Sei ferner $z \in \mathrm{cone}(S)$ beliebig mit $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in S$. Dann gilt $y^{\mathrm{T}} z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{y^{\mathrm{T}} x_i}_{\leq 0} \leq 0$, also $y \in (\mathrm{cone}(S))^\circ$.