Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel
3. Mai 2006

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

G4 a)

„ $\Rightarrow$ “ Im Falle $\text{rec}(P) = \{0\}$ ist 0 Ecke von $\text{rec}(P)$, und wir sind fertig.

Für die verbleibenden Fälle nehmen wir an, 0 wäre keine Ecke von $\text{rec}(P)$. Dann gibt es $v \neq 0 \in \text{rec}(P)$, so dass für alle $\lambda, \mu \geq 0$ $\lambda v \in \text{rec}(P)$ und $\mu(-v) \in \text{rec}(P)$ gilt. Sei nun x eine Ecke von P. Dann gilt $x + \frac{1}{\lambda} v \in P$ und $x + \frac{1}{\mu}(-v) \in P$. Damit lässt sich jedoch x durch $x = \frac{1}{2}(x+v) + \frac{1}{2}(x-v)$ als echte Konvexkombination von Elementen aus P darstellen und kann daher keine Ecke von P sein. Also muss 0 Ecke von $\text{rec}(P)$ sein.

„ $\Leftarrow$ “ Sei F eine Seitenfläche minimaler Dimension von P, und sei $x \in F$. Im Falle $\dim(F) = 0$ ist x eine Ecke von P, und wir sind fertig.

Für den Fall $\dim(F) > 0$ gibt es ein $v \in \mathbb{K}^n$, so dass $x + v \in F$ und $x - v \in F$. Aufgrund der Minimalität von F muss $x + \lambda v \in F$ für alle $\lambda \geq 0$ gelten. (Ansonsten gäbe es einen Schnitt mit einer weiteren Seitenfläche von P, wodurch eine Seitenfläche $\tilde{F}$ mit $\dim(\tilde{F}) < \dim(F)$ entstünde.) Damit sind aber v und $-v \in \text{rec}(P)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass 0 Ecke von $\text{rec}(P)$ ist. Folglich muss P mindestens eine Ecke besitzen.

b)

„ $\Rightarrow$ “ Definiere $K := \text{rec}(P) \backslash \text{cone}(\{z\}) \cup \{0\}$. Angenommen, K ist kein Kegel. Dann gibt es $u, v \in K$ und $\lambda, \mu \geq 0$ mit $x := \lambda u + \mu v \notin K$. Da $\text{rec}(P)$ ein Kegel ist, muss x in $\text{rec}(P) \backslash K$ liegen, also $x \in \text{cone}(\{z\}) \backslash \{0\}$. Es gibt also ein $r > 0$ mit $x = rz$. Folglich lässt sich z darstellen als $z = \frac{\lambda}{r} u + \frac{\mu}{r} v$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (i).

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, z ließe sich als echte konische Kombination der linear unabhängigen Vektoren $u, v \in \text{rec}(P)$ darstellen, d. h. es existieren $\lambda, \mu > 0$ mit $z = \lambda u + \mu v$. Da z eine *echte* konische Kombination von u und v ist, liegt weder u noch v in $\text{cone}(\{z\})$, also $u, v \in \text{rec}(P) \backslash \text{cone}(\{z\}) \cup \{0\} = K$. Da nach Annahme K ein Kegel ist, gilt $z \in K$, also insbesondere $z \notin \text{cone}(\{z\})$. Dies ist jedoch nicht möglich, da $z \in \text{cone}(\{z\})$ immer gilt. Also kann K kein Kegel sein.

G5 Wir bestimmen mit dem Projektionsalgorithmus zunächst (D, d), um dann das projizierte Polyeder $P(D, d) \cap H$ zu erhalten.

(1) Es gilt:

$$\begin{array}{rcrcl} A_1.c & = & -2 < 0 & \Rightarrow & 1 \in N \\ A_2.c & = & 1 > 0 & \Rightarrow & 2 \in P \\ A_3.c & = & 2 > 0 & \Rightarrow & 3 \in P \\ A_4.c & = & 0 & \Rightarrow & 4 \in Z. \end{array}$$

Damit:

$$N = \{1\}, \quad Z = \{4\}, \quad P = \{2, 3\}.$$

(2) Es gilt:

$$Z \cup (N \times P) = \{4, (1,2), (1,3)\},$$

also $r = |Z \cup (N \times P)| = 3$.
Setze $p(1) := 4,\ p(2) := (1,2),\ p(3) := (1,3)$.

(3) Iteration:

i=1: Wegen $p(1) \in Z$ setze

$$\begin{array}{rcl} D_1. & = & A_{p(1)}. = A_4. = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ d_1 & = & b_{p(1)} = b_4 = 1. \end{array}$$

i=2: Wegen $p(2) = (1,2) \in N \times P$ setze

$$\begin{aligned} D_{2\cdot} &= (A_{2\cdot}c)A_{1\cdot} - (A_{1\cdot}c)A_{2\cdot} \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ d_2 &= (A_{2\cdot}c)b_1 - (A_{1\cdot}c)b_2 \\ &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

i=3: Wegen $p(3) = (1,3) \in N \times P$ setze

$$\begin{aligned} D_{3\cdot} &= (A_{3\cdot}c)A_{1\cdot} - (A_{1\cdot}c)A_{3\cdot} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ d_3 &= (A_{3\cdot}c)b_1 - (A_{1\cdot}c)b_3 \\ &= 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

(4) Wir erhalten

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

G6 Wir bezeichnen die Zeilenindexmenge von A mit $M = \{1, ..., m\}$. Durch die Darstellung $P = P(A, b)$ sind die Gleichungen für die m Stützhyperebenen von P gegeben durch $A_{i\cdot}x \leq b_i$ für $i = 1, ..., m$.

Sei nun $z \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Der Abstand von z zur i-ten Stützhyperebene von P ist gegeben durch $d_i(z) = \frac{b_i - A_{i,\cdot}z}{||A_{i\cdot}||}$ (vgl. Hesse-Normalform).

Um nun eine P einbeschriebene Kugel mit maximalem Radius r zu bestimmen, müssen wir einen Punkt $z \in P$ finden, der von allen Stützhyperebenen von P höchstens Abstand r hat.

Formulieren wir diesen Sachverhalt als lineares Programm, erhalten wir

$$\begin{array}{lrcl} \max & r & & \\ \text{s. t.} & Az & \leq & b \\ & \frac{b_i - A_{i,\cdot}z}{||A_{i\cdot}||} & \leq & r. \end{array}$$