Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Agnes Dittel

26. April 2006

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Gruppenübungen

G1 Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

a) Nach Definition gilt: $\text{lin}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay\}$.
Setze

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{K}^n \quad \text{und} \\ f: & \quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \ f(x) = Ax. \end{aligned}$$

Dann gilt $f(P) = \text{lin}(A)$. Da $P = \mathbb{K}^n$ ein Polyeder ist, ist nach Satz 1.19 im Skript $f(P) = \text{lin}(A)$ als affines Bild davon ebenfalls ein Polyeder.

b) Nach Definition gilt: $\text{aff}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay,\ y^T\mathbb{1} = 1\}$.
Setze

$$\begin{aligned} P &= P\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T \\ -\mathbb{1}_n^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \\ f: & \quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \ f(x) = Ax. \end{aligned}$$

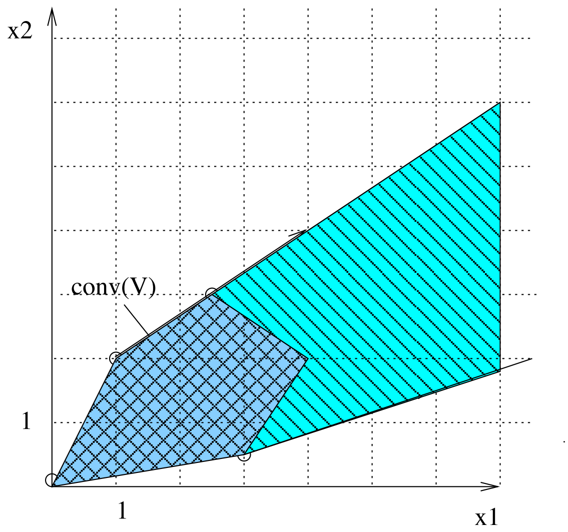
Dann gilt $f(P) = \text{aff}(A)$. Da P ein Polyeder ist, ist nach Satz 1.19 $f(P) = \text{aff}(A)$ als affines Bild davon ebenfalls ein Polyeder.

c) Nach Definition gilt: $\text{conv}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay,\ y^T\mathbb{1} = 1,\ y \geq 0\}$.
Setze

$$\begin{aligned} P &= P\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T \\ -\mathbb{1}_n^T \\ -I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \\ f: & \quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \ f(x) = Ax. \end{aligned}$$

Dann gilt $f(P) = \text{conv}(A)$. Da P ein Polyeder ist, ist nach Satz 1.19 $f(P) = \text{conv}(A)$ als affines Bild davon ebenfalls ein Polyeder.

G2 a) Aus den gegebenen Daten läßt sich das Polyeder P folgendermaßen skizzieren:



Für die äußere Beschreibung lesen wir aus der Skizze die Gleichungen der vier Geraden ab, welche die Halbräume begrenzen, deren Durchschnitt P ist:

$$\begin{array}{rcrcl} -\frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & \leq & \frac{4}{3} \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ \frac{1}{6}x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & - & x_2 & \leq & \frac{1}{2} \end{array}$$

b) Das Polyeder P sei gegeben durch die innere Beschreibung $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ mit

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{v_1, ..., v_k\} \subset \mathbb{K}^n \\ E & = & \{e_1, ..., e_l\} \subset \mathbb{K}^n \end{array}$$

Um die äußere Beschreibung $P = P(A, b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ zu erhalten, betrachten wir einen beliebigen Punkt $x \in P$, welchen wir als die Summe einer Konvexkombination der Vektoren aus V und einer konischen Kombination der Vektoren aus E darstellen:

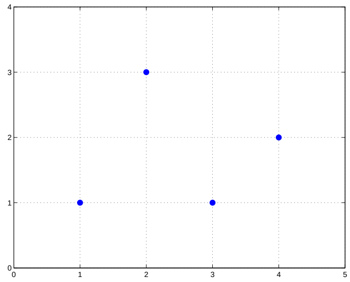
$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i e_i \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i & = & 1 \\ \lambda_i & \geq & 0 \ \ (i = 1, ..., k) \\ \mu_i & \geq & 0 \ \ (i = 1, ..., l) \end{array}$$

Diese Gleichungen und Ungleichungen können wir in einem linearen Ungleichungssystem zusammenfassen:

$$
\begin{pmatrix}
v_{11} & \cdots & v_{1k} & e_{11} & \cdots & e_{1l} & -1 & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
v_{n1} & \cdots & v_{nk} & e_{n1} & \cdots & e_{nl} & & & -1 \\
-v_{11} & \cdots & -v_{1k} & -e_{11} & \cdots & -e_{1l} & 1 & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
-v_{n1} & \cdots & -v_{nk} & -e_{n1} & \cdots & -e_{nl} & & & 1 \\
-1 & \cdots & -1 & & & & & & \\
1 & \cdots & 1 & & & & & & \\
-1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & -1 & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & -1 & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_l \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
$$

Auf dieses Ungleichungssystem wenden wir nun sukzessive die Fourier-Motzkin-Elimination an, um die Variablen λ_i und μ_i herauszuprojizieren. Wir erhalten ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$, welches nur noch die Variablen $\{x_1, ..., x_n\}$ enthält, welche die äußere Beschreibung liefern.

G3 a) Graphische Darstellung von M_1:



Wir setzen

$$\begin{aligned} I &= \{1,2,3,4\}, \\ F &= \{f_i \mid i \in I\} \quad \text{mit } f_1 = 1,\ f_2 = 3,\ f_3 = 1,\ f_4 = 2. \end{aligned}$$

Dann führen wir für $i \in I$ Binärvariablen y_i ein mit $y_i = 1 \Leftrightarrow x = i$ und definieren

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \sum_{i \in I} y_i \cdot f_i.$$

Dann ist mit obigen Definitionen $M_1 = \left\{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{Z}^2\right\}$ diejenige Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

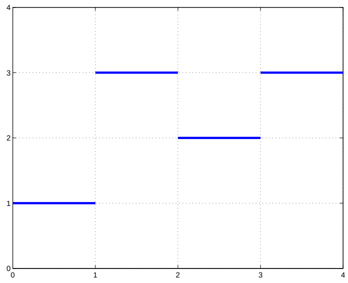
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i \in I} y_i f_i \\ \sum_{i \in I} y_i &= 1 \\ x &\leq i + M(1 - y_i) \quad \forall i \in I \\ x &\geq i - M(1 - y_i) \quad \forall i \in I \\ y_i &\in \{0,1\} \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

b) Graphische Darstellung von M_2:
Wir setzen

$$\begin{aligned} I &= \{1,2,3,4\}, \\ L &= \{l_i \mid i \in I\} \quad \text{mit } l_1 = 0,\ l_2 = 1,\ l_3 = 2,\ l_4 = 3, \\ R &= \{r_i \mid i \in I\} \quad \text{mit } r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3,\ r_4 = 4, \\ F &= \{f_i \mid i \in I\} \quad \text{mit } f_1 = 1,\ f_2 = 3,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3. \end{aligned}$$

Um M_2 als Konvexkombination der Funktionswerte f_i an den Intervall-Endpunkten l_i und r_i darzustellen, führen wir für $i \in I$ nicht-negative Variablen λ_i, μ_i ein mit $\sum_{i \in I}(\lambda_i + \mu_i) = 1$. Dann führen wir für $i \in I$ Binärvariablen y_i ein mit $y_i = 1 \Leftrightarrow x \in [l_i, r_i]$ und definieren

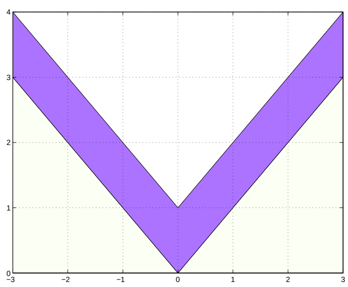
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) f_i.$$



Dann ist mit obigen Definitionen $M_2 = \left\{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{R}^2\right\}$ diejenige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{array}{rcl} x & \geq & l_i + M(1-y_i) \quad \forall i \in I \\ x & \leq & r_i - M(1-y_i) \quad \forall i \in I \\ f(x) & = & \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) f_i \\ \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) & = & 1 \\ \sum_{i \in I} y_i & = & 1 \\ y_i & \leq & \lambda_i + \mu_i \quad \forall i \in I \\ \lambda_i, \mu_i & \geq & 0 \qquad \forall i \in I \\ y_i & \in & \{0,1\} \qquad \forall i \in I. \end{array}$$

c) Graphische Darstellung von M_3:



Wir betrachten die Mengen $M_- := M_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$ und $M_+ := M_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ zunächst separat.
M_- kann durch folgendes Ungleichungssystem beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Analog kann M_+ durch folgendes Ungleichungssystem beschrieben werden:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 0, \\ -x_1 + x_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Nun führen wir noch eine Binärvariable y ein, durch die eine der beiden Mengen M_- bzw. M_+ ausgewählt wird:

$$y = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in M_-, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist M_3 die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, welche durch folgende Bedingungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq M(1-y), \\ x_1 &\geq -My, \\ x_1 + x_2 &\geq 0 - M(1-y), \\ x_1 + x_2 &\leq 1 + M(1-y), \\ -x_1 + x_2 &\geq 0 - My, \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 + My. \end{aligned}$$