Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Pia Bales

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Mai 2006

Wie löse ich das? – Übung 3

Gruppenübung

G 7 Konvergenzgeschwindigkeit

Berechnen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten ρ folgender Partialsummen:

$$\text{a) } s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \qquad \text{b) } s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

G 8 Modifizierte Euler-Extrapolation

Es gilt $s_{i,j+1} = s_{i+1,j} + \frac{r_{j+1}}{1-r_{j+1}}\left(s_{i+1,j} - s_{i,j}\right)$.

Zeigen Sie: Falls $s_k = s + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j r_j^k$, dann ist $s_{k,n} = s$.

Motivation: Das modifizierte Euler-Verfahren kann also benutzt werden, falls sich die Folge s_k mit Hilfe einer Summe von geometrischen Folgen mit bekannten Abklingraten r_j genau genug approximieren lässt.

G 9 Modifizierte Euler-Extrapolation

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}$$

näherungsweise mit Hilfe der modifizierten Euler-Extrapolation und $r_j = -1$. Welche Werte erhalten sie für $k = 10$ und $k = 20$? Welchen Wert erhalten Sie, wenn Sie die Summe direkt (für $n = 1, \ldots, 10$ bzw. $n = 1, \ldots, 20$) ausrechnen?

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung

$$s = \log(2) = 0.6931471805599453 86227.$$

G 10 Berechnen Sie näherungsweise

$$\int_0^1 -\log(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

mit Hilfe der modifizierten Euler-Extrapolation. Berechnen Sie die s_k mit der summierten Mittelpunktsregel (2^{k-1}, $k = 1, 2, \ldots,$ Teilintervalle).

a) $r_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$, $j = 1, 2, \ldots$

b) $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(j-1)}$, $j = 2, 3, \ldots$.