Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Pia Bales

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Juli 2006

Wie löse ich das? – Übung 11

Gruppenübung

G 28 Berechnen von $\|A\|$ mittels komplexer Summationsformel

Aus der komplexen Analysis ergab sich die Summationsformel für eine Parametrisierung $Z(t)$ und Reparametrisierung $t = \phi(\tau)$ mit Schrittweite h und Abschneidepunkt T:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \approx \sum_{k=-m}^{m} w_k f(c_k), \qquad m = \left\lfloor \frac{T}{h} \right\rfloor$$

mit den komplexwertigen Stützstellen und Gewichten

$$\begin{aligned} c_k &= Z\left(\phi(kh)\right), \\ w_k &= \frac{h}{2i}\cot(\pi c_k) \cdot Z'(\phi(kh)) \cdot \phi'(kh). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Stützstellen c_k und Gewichte w_k für die Parametrisierung

$$Z(t) = \sigma\left(\cosh(t) - i\sinh(t)\right)$$

mit $\sigma \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\}$ und der Reparametrisierung

$$\phi(\tau) = \tau + \frac{\tau^3}{3}.$$

Verwenden Sie als Abschneidepunkt $T = \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^{1/3}$, $\epsilon = 10^{-16}$, und als Schrittweiten $h = 2^i \cdot 0.04$, $i = 4, 3, \ldots, 0$.

b) Erzeugen Sie die Matrizen $\hat{A}_n$, $n = 2m+1$, analog zu $\tilde{A}_n$ in Kapitel 2.4.

c) Berechnen Sie $\|\hat{A}_n\|$. Da die $\hat{A}_n$ komplexe Matrizen sind, lässt sich dies nicht mit dem Befehl `norm(A)` berechnen. Berechnen Sie stattdessen den Realteil der Wurzel des maximalen Eigenwerts von $\hat{A}_n^T \hat{A}_n$.
(Achtung: In Matlab bedeutet `A'` bei komplexen Matrizen soviel wie $A^* = \bar{A}^T$. Verwenden Sie stattdessen `A.'`, dann wird die Matrix nur transponiert und nicht komplex konjugiert.)

d) Erstellen Sie eine Tabelle, in der für die verschiedenen h folgende Werte eingetragen werden: h, n, $\|\hat{A}_n\|$ für $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\|\hat{A}_n\|$ für $\sigma = \frac{1}{4}$.

Hinweis: Die Funktion `cot` *hat in Matlab 6.5 einen Bug und funktioniert für große komplexe Zahlen nicht richtig (so ist z.B.* `cot(1000i) = NaN` *statt $-i$). Auf der Veranstaltungsseite im Internet finden Sie eine korrigierte Version* `cotangent.m`*, die diesen Bug repariert.*