



7. Juli 2006

Wie löse ich das? – Übung 10

Gruppenübung

G 26 Berechnung von $\zeta(4)$ mittels Trapezsumme

Berechnen Sie

$$\zeta(4) = 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(1-t^2) \tanh(\frac{\pi t}{2})}{(1+t^2)^4} dt = \frac{\pi^4}{90}.$$

mittels der Funktion `TrapezoidalSum.m`, die die Trapezsumme eines Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt$$

mittels mehrfacher sinh-Transformation berechnet und gleichzeitig die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen mit zurückgibt.

- Berechnen Sie $\zeta(4)$ mit `level = 0` (keine sinh-Transformation), Schrittweiten `h = [0.3, 0.15]` und `tol = 1e-16`. Übergeben Sie $F(t)$ als Inline-Objekt. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert.
- Berechnen Sie $\zeta(4)$ mit einfacher sinh-Transformation (`level = 1`) und zweifacher sinh-Transformation (`level = 2`) (die restlichen Werte wie oben) und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.
- Zeichnen Sie den Fehler der Trapezsumme für `level = [1, 2]` aufgetragen einmal über `1./h = 1:0.01:10` und einmal über die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen bis zum Abschneiden.

Hinweis: Sie finden die Funktion `TrapezoidalSum.m` auf der Veranstaltungsseite im Internet.

G 27 Singularitäten des Integranden der transformierten ζ -Funktion

a) Sei

$$F(z) = 16 \frac{z(1-z^2) \tanh(\frac{\pi z}{2})}{(1+z^2)^4}$$

der Integrand des obigen Integrals für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Die Singularitäten von $F(z)$ liegen bei $z = (2k+1)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Sei $G(\tau)$ der Integrand des obigen Integrals nach Substitution mit $t = \sinh(\tau)$. Zeigen Sie: Für die Singularitäten von $G(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$, gilt $\text{Im}(\tau_s) = \frac{2m+1}{2}\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.