1 Exponentielle Summationsformel

Theorem 1.1 (Euler-Maclaurin-Summationsformel)
Seien n, m positive ganze Zahlen und g eine $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion auf $[0\ \ n]$. Dann

$$\sum_{k=0}^{n} g(k) = \frac{1}{2}\left(g(0) + g(n)\right) + \int_0^n g(x)\,dx + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(n) - g^{(2k-1)}(0)\right) + R_{2m} \tag{1}$$

mit

$$|R_{2m}| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_0^n |g^{(2m)}(x)|\,dx$$

und den Bernoulli-Zahlen B_{2k}. ■

Lemma 1.2 *Sei l eine positive ganze Zahl und $f_l(x) = (x+l)^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. Die Funktion*

$$\phi_{exp}(u) = \exp\left(\frac{2}{(1-u)^2} - \frac{1}{2u^2}\right) \tag{2}$$

mit der Ableitung

$$\phi'_{exp}(u) = \exp\left(\frac{2}{(1-u)^2} - \frac{1}{2u^2}\right) \cdot \left(\frac{4}{(1-u)^3} + \frac{1}{u^3}\right).$$

ist auf $[0,1)$ streng monoton wachsend und bildet $[0,1)$ auf $[0,\infty)$ ab. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_l(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \cdot f_l\left(k + \phi\left(\frac{k}{n}\right)\right). \tag{3}$$

Beweis Es gilt

$$\phi^{(i)}_{exp}(0) = 0, \quad i \geq 0,$$
$$\lim_{x\to 1} \phi^{(i)}_{exp}(1) \to \infty, \quad i \geq 0.$$

Definiere

$$\tilde{f}_l(x) = \left(1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \cdot f_l\left(x + \phi\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$\tilde{f}_l^{(i)}(0) = f_l^{(i)}(0), \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$\tilde{f}_l^{(i)}(n) = \lim_{x\to\infty} f_l^{(i)}(x) = 0, \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Damit gilt mit Theorem 1.1

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} f_l(k) &= \frac{1}{2}\left(f_l(0) + \lim_{x\to\infty} f_l(x)\right) + \int_0^{\infty} f_l(x)\,\mathrm{d}x + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\lim_{x\to\infty} f_l^{(2k-1)}(x) - f_l^{(2k-1)}(0)\right) + R_{2m}.\end{aligned}$$

Substitution mit $x = \xi + \phi_{exp}\left(\frac{\xi}{n}\right)$ ergibt

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} f_l(0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f_l^{(2k-1)}(0) + R_{2m} + \\ &+ \int_0^{n} \left(1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right) \cdot f_l\left(\xi + \phi_{exp}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2} f_l(0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f_l^{(2k-1)}(0) + R_{2m} + \int_0^{n} \tilde{f}_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

nochmaliges Anwenden von Theorem 1.1 liefert

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} f_l(0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f_l^{(2k-1)}(0) + R_{2m} + \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_l(k) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\tilde{f}_l(0) + \tilde{f}_l(n)\right) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\tilde{f}_l^{(2k-1)}(n) - \tilde{f}_l^{(2k-1)}(0)\right) - \tilde{R}_{2m} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_l(k) + R_{2m} - \tilde{R}_{2m}.\end{aligned}$$

Da $\tilde{f}_l(n) = 0$, ergibt sich die Behauptung.

$\blacksquare$

Wir wenden jetzt Lemma 1.2 auf unser Problem an (analog zu Strebels Summationsformel, $f(k)$ verhält sich wie $k^{-\alpha}$). Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \cdot f_1\left(k + \phi_{exp}\left(\frac{k}{n}\right)\right) + R_{2m} - \tilde{R}_{2m} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \cdot f\left(1 + k + \phi_{exp}\left(\frac{k}{n}\right)\right) + R_{2m} - \tilde{R}_{2m}.\end{aligned}$$

Damit lautet die exponentielle Summationsformel

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k f(c_k) + R_{2m} - \tilde{R}_{2m} \tag{4}$$

mit den Gewichten und Stützstellen

$$w_k = 1 + n^{-1}\phi'_{exp}\left(\frac{k}{n}\right), \tag{5}$$

$$c_k = 1 + k + \phi_{exp}\left(\frac{k}{n}\right). \tag{6}$$