Wie löse ich das? – Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 Konvergenzgeschwindigkeit

Berechnen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten ρ folgender Partialsummen:

$$\text{a) } s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \qquad \text{b) } s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

a) *Die Konvergenzgeschwindigkeit berechnet sich wie folgt:*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{s - s_{k+1}}{s - s_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n^2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(k+1)^2}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{(k+1)^2 \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Nun kommt es darauf an, ob

$$\lim_{k\to\infty} (k+1)^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{k+n+1}\right)^2$$

existiert und wenn ja, was der Grenzwert ist.
Sei $m \in \mathbb{N}$. Finde ein $k \in \mathbb{N}$, so dass die ersten $2m$ Summanden größer oder gleich $\frac{1}{2}$ sind:

$$\left(1 - \frac{2m}{k+2m+1}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq 2(1+\sqrt{2})m - 1.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ lässt sich also ein $k \in \mathbb{N}$ finden, so dass die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{k+n+1}\right)^2 \geq \sum_{n=0}^{2m} \left(1 - \frac{n}{k+n+1}\right)^2 \geq 2m \cdot \frac{1}{2} = m$$

ist. Für $m \to \infty$ divergiert also die Summe.
Damit ist die Konvergenzgeschwindigkeit $\rho = 1$, die Konvergenz also sublinear (langsam).

b) *Die Konvergenzgeschwindigkeit ist*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)(k+3)} + \frac{x^3}{(k+2)(k+3)(k+4)} + \ldots}$$

Sei μ *das Zählmaß* ($\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty), \mu(\Omega) = |\Omega|$ *für* $\Omega \subset \mathbb{N}$)*. Dann lässt sich die Summe unter dem Bruchstrich schreiben als*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k(n) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} a_k(n)\ \mu(\,dn)$$

mit

$$a_k(n) = \frac{x^n(k+1)!}{(n+k+1)!}.$$

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k(n) = a(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \quad (a_k \textit{ punktweise konvergent})$$

und

$$|a_k(n)| \le \frac{|x|^n}{n!} = g(n) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(Anmerkung: def. $0^0 = 1$*).* $g(n)$ *ist integrierbar:*

$$\int_{\mathbb{N}} g(n)\mu(\,dn) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = e^{|x|}$$

Lebesgues Theorem über majorisierte Konvergenz besagt, dass dann

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} a_k(n)\mu(\,dn) = \int_{\mathbb{N}} a(n)\mu(\,dn) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) = 1$$

gilt. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist also $\rho = 1 - \frac{1}{1} = 0$ *(superlineare Konvergenz).*