Wie löse ich das? – Übung 9, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 25 Transformation der ζ-Funktion

Transformieren Sie

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4}$$

in ein reelles Integral, indem Sie Theorem B1 anwenden.

Zeigen Sie

$$\zeta(4) = 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(1-t^2)\tanh(\frac{\pi t}{2})}{(1+t^2)^4}\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Integrationsweg $\mathcal{C}$ mit der Parametrisierung $Z(t) = \frac{1}{2}(1-it)$.

Lösung: Anwenden von Theorem B1 ergibt

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \overset{Thm.B1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^4}\, dz$$

Substitution mit $Z(t) = \frac{1}{2}(1-it)$ liefert

$$= -4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-it)\right)}{(1-it)^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-it)\right)}\, dt.$$

Mit $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, $\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ und $\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$, $\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$ ergibt sich

$$= -4i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{(1-it)^4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\, dt$$

$$= -4i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{(1-it)^4}\, dt$$

Erweitern des Bruches mit $(1+it)^4$ ergibt

$$= -4i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+it)^4 \tanh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{(1+t^2)^4}\, dt$$

Mit $-4i(1+it)^4 = 16t(1-t^2) - 4i\left(1-6t^2+t^4\right)$ *lässt sich das Integral aufteilen in*

$$= 16 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t(1-t^2)\tanh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left(1+t^2\right)^4}\,dt - 4i \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-6t^2+t^4)\tanh\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left(1+t^2\right)^4}\,dt}_{=0}\,.$$

Da der zweite Integrand eine ungerade Funktion ist, verschwindet das rechte Integral.