Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
13.07.2006

12. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie den Laplace-Operator in 2 Dimensionen in Polarkoordinaten.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie eine Lösung des Wellengleichungs-Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) &= 0, & t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie dieses System physikalisch.

Hausübung

Aufgabe H1

Betrachten Sie einen Torus vom Umfang $2L$, welcher eine Chemikalie der Konzentration $c(x,t)$ gelöst in Wasser enthält. Der Parameter x bezeichne die Bogenlänge mit $0 < x < 2L$.

Betrachten Sie das Anfangs-Randwert-Problem

$$\begin{aligned} c_t &= c_{xx}, & 0 < x < 2L,\ t > 0 \\ c(0,t) &= c(2L,t), & t > 0 \\ c_x(0,t) &= c_x(2L,t), & t > 0 \\ c(x,0) &= f(x), & 0 < x < 2L \end{aligned}$$

Obige Randbedingungen heißen periodische Randbedingungen.

(a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Sturm-Liouville-Problem die Eigenwerte

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1 \\ F_n(x) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Konzentration $c(x,t)$ für $0 < x < 2L$ und $t > 0$.

Aufgabe H2 (freiwillig, mit Maple)

Betrachten Sie das AWP für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= 10x^3(1-x), && 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Die Lösung hiervon wurde in der Vorlesung bestimmt.

(a) Benutzen Sie Maple, um die Fourier-Koeffizienten c_n für $n = 1, 2, 6$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie die ersten sechs Terme der approximierenden Fourierreihe und stellen sie sie graphisch dar.