Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
06.07.2006

11. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(*) \qquad -u'' + x^2 u = cu, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ sowie die Funktionen $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Skizzieren Sie $H_0, \ldots, H_4$.

(b) Warum sind H_n Polynome für alle n?

(c) Zeigen Sie, dass

$$v_n(x) := H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eine Lösung von $(*)$ ist, falls $c = 2n + 1$.
Hinweis: Zeigen Sie $H_n' = 2nH_{n-1}$.

(d) Zeigen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} v_n v_m \,\mathrm{d}x = 0$, falls $n \neq m$, bzw. dass $\{v_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ orthogonal sind auf $(-\infty, \infty)$.

Aufgabe G2 (Haarwavelets)

Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze $\Psi(x) := \Phi(2x) - \Phi(2x - 1)$. Die Haarwavelets sind definiert durch

$$\Psi_{mn} = 2^{\frac{m}{2}} \Psi(2^m x - n), \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(a) Skizzieren Sie den Graph von Ψ_{mn}.

(b) Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und f besitze die Darstellung

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Psi_{mn}(x).$$

Finden Sie eine Darstellung für C_{mn}.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f gegeben ist durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

Hinweis: Die N-ten Partialsummen „übertreffen” $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ für alle N ($\to$ Gibbs-Phänomen).

Aufgabe H2

(a) Zeigen Sie, dass das Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u, \quad 0 < x < 2 \\ u(0) + 2u'(0) &= 0 \\ 3u(2) + 2u'(2) &= 0 \end{aligned}$$

genau einen negativen Eigenwert besitzt.

(b) Ist 0 ein Eigenwert?

(c) Wie viele positive Eigenwerte gibt es?

Aufgabe H3 (gedämpfte Wellengleichung)

Betrachten Sie die DGL

$$\begin{aligned} u_{tt} + ku_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, & t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) &= 0, & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

welche die gedämpfte Wellengleichung mit fixierten Enden beschreibt.

Verwenden Sie den Ansatz der Trennung der Variablen, um eine Lösung für $k < 2\pi$ zu finden.