Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
29.06.2006

10. Übungsblatt Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

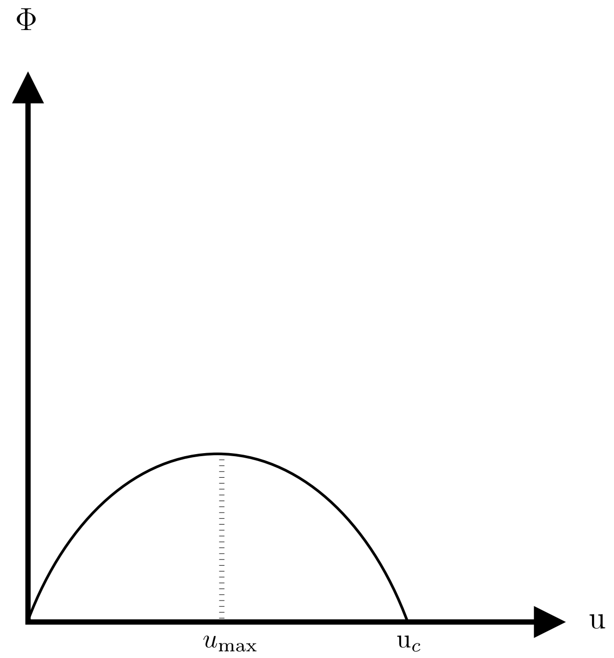
Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie das folgende Modell für den Verkehrsfluss

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

mit $c(u) = \Phi'(u)$, $c'(u) < 0$ und Φ von der Form



Definiere die Geschwindigkeit V des Verkehrs durch

$$\Phi(u) = uV(u).$$

Wir nehmen an, dass $u\Phi'(u) < \Phi(u)$ gilt.

(a) Zeigen Sie: $V' < 0$.

(b) $c(u) = \Phi'(u) = uV'(u) + V(u)$

(c) $c(u) < V(u)$, d.h. der Verkehr bewegt sich schneller als Signalgeschwindigkeit im Fluss.

(d) Bestimmen Sie für $u_c = 225$ Fahrzeuge/km, $u_{\max} = 80$ Fahrzeuge/km und den maximalen Fluss 1500 Fahrzeuge/h die Geschwindigkeit, welche den maximalen Fluss erzeugt.

Aufgabe G2

Finden Sie schwache Lösungen zu den folgenden Anfangswertproblemen:

(a)

$$\begin{aligned} u_t + (e^u)_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{2}}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1

Betrachten Sie die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b u(x,t)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[u(a,t)^2 - u(b,t)^2\right] + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

mit $g(x) = \begin{cases} 1, & x > \frac{1}{2} \\ c, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die schwache Lösung obiger Gleichung für die Anfangsbedingung $\forall x \in \mathbb{R} : u(x,0) =$ const.

Aufgabe H2

Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{t}, & -\sqrt{t} < x < \sqrt{t} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine schwache Lösung des Problems

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

ist. Bestimmen Sie die Schocks und deren Geschwindigkeit.