Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
08.06.2006

7. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Energiemethoden für die Wellengleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $T > 0$.
Dann existiert höchstens eine Funktion $u \in C^2(Q_T)$ mit

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad Q_T, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad T_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T, \\ u_t &= k \quad \text{auf} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $Q_T := \Omega \times (0, T]$.

Hinweis: Betrachten Sie die "Energie"

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \mathrm{d}x, \; 0 \le t \le T$$

und berechnen Sie $E'(t)$.

Aufgabe G2

Es seien $g \in C^2(\mathbb{R}),\; k \in C^1(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben als

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\; [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} k(y) \mathrm{d}y.$$

Dann gilt:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

(b) $u_{tt} - u_{xx} = 0,\; x \in \mathbb{R},\; t > 0$

(c) $u(x, 0) = g(x),\; x \in \mathbb{R}$

(d) $u_t(x, 0) = k(x),\; x \in \mathbb{R}$

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \\ u_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dann gilt: $u(x,t) = 0$, falls $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} g) > t$.

Hinweis: Betrachten Sie analog zu Aufgabe G1 die Energie

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x,T-t)} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

für ein $T > 0$ und zeigen Sie $g(x) = 0 \forall x \in B(x,T) \Rightarrow u(x,T) = 0$.