Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
01.06.2006

6. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Zeigen Sie: die Funktion

$$v(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} u(x,s) \, \mathrm{d}s$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Aufgabe G2

(a) Berechnen Sie für eine gegebene Funktion g eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mit Hilfe der Fouriertransformation.

(b) Diskutieren Sie anhand Ihrer Ergebnisse die Eigenschaften von Lösungen der Wellengleichung und vergleichen Sie diese mit den Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Hinterfragen Sie insbesondere die Glattheitseigenschaften der Lösungen sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Außerdem bezeichne

$$m(x,r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}\sigma(y)$$

das *sphärische Mittel* der Funktion u.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\lim_{r\to 0} m(x,r) = u(x)$

(b) $\lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r} m(x,r) = 0$

(c) $\frac{\partial}{\partial r} m(x,r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu\ \mathrm{d}\sigma(y)$

(d) $\frac{\partial^2}{\partial r^2} m(x,r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} m(x,r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}\sigma(y)$

Hinweis: Satz von Gauß