Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
24.05.2006

5. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die semilineare parabolische Gleichung

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (\nabla u)^2 &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0) &= g, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Setze $w := \phi(u)$, wobei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt.

(a) Es gilt $w_t = \Delta w$ genau dann, wenn $\phi'' + \phi' = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie: wenn u (1) löst, dann löst $w = e^{-u}$ das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ w(0) &= e^{-g}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Formel $w = e^{-u}$ definiert die *Hopf-Cole-Transformation*.

(c) Die Funktion u gegeben durch

$$u(x,t) = -\log\left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - g(y)}\, \mathrm{d}y\right)$$

ist eine Lösung von (1).

Aufgabe G2 (Energiemethoden für WLG)

Zeigen Sie, dass höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ der Gleichung

$$(WLG) \begin{cases} u_t - \Delta u &= f \text{ in } Q_T, \\ u &= g \text{ auf } \partial Q_T, \end{cases}$$

existiert, via des folgenden Energieansatzes:

Für eine weitere Lösung $\tilde{u}$ der Wärmeleitungsgleichung (WLG) setze $w := u - \tilde{u}$ und

$$E(t) = \int_\Omega w^2(x,t)\mathrm{d}x, \quad 0 \le t \le T.$$

Dann gilt $E'(t) \le 0$ und daher $E(t) \le E(0) = 0$ für $0 \le t \le T$.
Also ist $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ in Q_T.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei u eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

(a) Setze $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass u_λ die Wärmeleitungsgleichung löst.

(b) Benutzen sie (a), um zu zeigen, dass v gegeben durch

$$v(x,t) := x\nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

die Wärmeleitungsgleichung ebensfalls löst.

Aufgabe H2

Sei $u_0 \in BC(\mathbb{R}^n)$ mit $u_0 \geq 0, u \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$

$$u(x,t) = (G_t * u_0)(x)$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ strikt positiv ist.