Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
11.05.2006

3. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen (klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})),\ x,y \ \in \ B(0,1),\ x \neq y.$$

Hinweis: Zeigen Sie

(a) $y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y-\tilde{x})$ ist harmonisch $\forall y \neq x$
(b) $y \mapsto \phi^x(y) := \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$ ist harmonisch in $B(0,1)$
(c) $(|x|\ |y-\tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x-y|^{-(n-2)},\ y \in \partial B(0,1),\ x \neq 0$
(d) $|x|^2\ |y-\tilde{x}|^2 = |x-y|^2,\ y \in \partial B(0,1),\ x \neq 0.$

Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\Delta u = 0$ rotationssymmetrisch ist. D.h.: sei O eine orthogonale $n \times n$-Matrix und $v(x) := u(Ox)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\Delta v = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, zusammenhängend mit glattem Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Funktion mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad && \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $g \in C(\partial\Omega)$ mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.
Zeigen Sie: Falls $g(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \partial\Omega$, so gilt $u(x) > 0 \forall x \in \Omega$.

Aufgabe H2 (I)

Sei $\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, x_n > 0\}$ und $u \in C(\overline{\Omega^+})$ harmonisch in Ω^+ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \{x_n = 0\}$. Sei v gegeben durch

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0, \end{cases}$$

für $x \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$. Dann ist v harmonisch in Ω.