Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
04.05.2006

2. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen
(klassische Methoden)

Gruppenübung

Aufgabe G1

Machen Sie sich mit elementaren Eigenschaften der Faltung zweier Funktionen vertraut. Speziell sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.
Zeigen Sie:

(a) $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $D(f * g) = f * D(g)$.

(b) $f * g = g * f$.

Aufgabe G2

Sei ϕ die Fundamentallösung des Laplace-Operators und $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie:

$$\nabla\phi(s) = \frac{-1}{n(n-2)\omega(n)}\frac{s}{|s|^n}, \quad s \neq 0.$$

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y)$ für $y \in \partial B(0, \varepsilon)$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand.
Beweisen Sie die greenschen Formeln

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu v)u \, \mathrm{d}\sigma$$
$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v - v\partial_\nu u \, \mathrm{d}\sigma$$
$$\int_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v - v\partial_\nu u \, \mathrm{d}\sigma$$

Hinweis: wenden sie den Gaußschen Satz auf $F = \nabla v \cdot u$ an.