VORLESUNG
DIFFERENTIALGEOMETRIE SS 06

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Die klassische Kurven- und Flächentheorie ist das Thema folgender Bücher:

[B] Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter 01, 25 Euro, (Detailliert und gut lesbar. Das am besten zur Vorlesung passende Buch.)

[DC] Do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 83, engl.: Prentice Hall 76 (das klassische Standardwerk)

[EJ] J.-H. Eschenburg, J. Jost: Differentialgeometrie und Minimalflächen, 2. Aufl. Springer 2007 (detailliert, viele interessante Bemerkungen und Aufgaben, und natürlich ein schöner Schwerpunkt)

[MR] S. Montiel, A. Ros: Curves and surfaces, AMS 2005

[Kl] Klingenberg: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie / A course on differential geometry, Springer 1970 (kurz und bündig)

[Kü] Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 99 / Differential Geometry, American Mathematical Society 02

[O] Oprea: Differential Geometry and its applications, Prentice Hall 97 (In diesem Buch wird eine elementare Darstellung der Differentialgeometrie ergänzt durch Abschnitte über die Programmierung in Maple.)

Literatur zu Bézierkurven und -flächen

[F] Farin: Curves and surfaces for computer-aided geometric design, Academic Press 1988, 1997 (für Bézier-Kurven)

[HL] Hoschek, Lasser: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, Teubner 1992

Literatur zu weiteren speziellen Fragestellungen:

[H] Hopf: Differential Geometry in the Large, Springer Lecture Notes Nr. 1000; 1946/1989. (Ein wunderschöner Klassiker)

[HT] Hildebrandt, Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser 1996 (Ein populärwissenschaftliches Buch, das für Variations-Aspekte der Differentialgeometrie, beispielsweise Geodätische und Minimalflächen, eine schöne Einführung darstellt. Das Buch ist hübsch bebildert.)

[Sp] Spallek: Kurven und Karten, 2. Auflage, BI-Verlag 94 (enthält interessante Anwendungen der Kurventheorie: Zahnräder, Wankelmotor, Stabilität von Schiffen, etc.)

Einführung

Diese Vorlesung behandelt die klassische Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Sie wendet sich an Studenten der Mathematik und Physik ab dem 4. Semester. Ich habe sie in den Jahren 2002 (vierstündig) und dann 2004 und 2006 zweistündig in verschiedenen Variationen gehalten.

Als Einführung dient ein Kapitel über Kurventheorie. Ich habe versucht, sauber zu trennen zwischen parametrisierten Kurven einerseits und ihren Äquivalenzklassen unter Umparametrisierungen andererseits, also den Kurven schlechthin.

Die Flächentheorie führe ich in beliebiger Dimension ein, d.h. ich betrachte Hyperflächen. Ich denke, dass viele Konzepte und auch die Notation in Dimension 2 etwas zu speziell sind, und daher vom Grundsätzlichen ablenken. Eine weitere Entscheidung für die Präsentation war es, stets parametrisch zu arbeiten.

Die Abschnitte über Kurven und Flächen werden abgeschlossen von jeweils einer Vorlesung über Bézierkurven und -flächen. Diese Vorlesungen hat Ulrich Reif entworfen, dem ich dafür danke. Sie sollen in der Praxis zur Modellierung benutzte Kurven bzw. Flächen exemplarisch vorstellen.

Die Übungsaufgaben aller Vorlesungen sind an die Kapitel angehängt. Darin enthalten sind zahlreiche Aufgaben, die Matthias Bergner 2004 entworfen hat sowie Aufgaben von U. Reif 2008. Ich danke für die vielen Vorschläge und Korrekturen von Studenten, die in das vorliegende Skript eingegangen sind.

Darmstadt, August 2008 Karsten Große-Brauckmann

Teil 1. Kurven

`1. Vorlesung, Montag 24.4.06`

Die klassische Differentialgeometrie befasst sich mit Kurven und Flächen. Diese Objekte sind meist durch eine Abbildung oder Parametrisierung gegeben, seltener implizit, d.h. als Nullstellenmenge von Funktionen. Man interessiert sich für Eigenschaften, die nur von der Gestalt der Kurven oder Flächen abhängen. Es geht also um diejenigen Eigenschaften, die unabhängig von Koordinaten und sogar unabhängig von den Parametern der speziellen Beschreibung sind.

Zuerst wollen wir im Falle von Kurven die geometrischen Begriffe Länge und Krümmung studieren. Um Kurven zu behandeln, genügt die Analysis einer Veränderlichen.

1. Kurven und ihre Bogenlänge

1.1. **Parametrisierungen.** Im folgenden steht I für beliebige Intervalle, also für zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition. (i) Eine *parametrisierte Kurve* ist eine glatte (beliebig oft differenzierbare) Abbildung $c\colon I \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Ihr Bild $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Spur*.
(ii) Die parametrisierte Kurve c heißt *reguläre Kurve*, wenn $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist.

In der Physik beschreibt eine parametrisierte Kurve c eine Bewegung: t ist Zeit, $c(t)$ ist bewegtes Objekt (Massenpunkt), der *Tangentialvektor* $c'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor. In der Physik sind Meist ist die Kurve als Lösung einer gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, z.B. die Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld.

Da wir auf die Regularität nicht genauer eingehen wollen, setzen wir stets Glattheit voraus, d.h. die verwendetetn Parametrisierungen sollen beliebig oft differenzierbar sein. In der Regel genügt jedoch C^3, manchmal auch C^1 oder C^2.

Beispiele ebener Kurven $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

1. Der *Kreis* ist die Spur der regulären Kurve $c(t) := (\cos t, \sin t)$.

2. Die Spur von $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ ist die *Figur acht* oder *Lemniskate*.

3. Die *Neilsche Parabel* $c(t) := (t^2, t^3)$ ist nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

4. $c(t) := (t^3, t^3)$ hat als Spur die Diagonale von $\mathbb{R}^2$. Die Kurve ist jedoch nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

Definition. Eine *Parametertransformation* ist ein glatter Diffeomorphismus $\varphi\colon I \to \tilde{I}$ von Intervallen. Man nennt dann $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine *Umparametrisierung* von c. Ist $\varphi' > 0$, so nennt man die Umparametrisierung *orientierungserhaltend.*

Die Übereinstimmung regulärer Kurven nach Umparametrisierung definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der regulären Kurven (wieso?). Orientierungserhaltende Umparametrisierungen erhalten den Durchlaufsinn; sie induzieren eine speziellere Äquivalenzrelation.

Definition. (i) Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären Kurven unter der Relation Umparametrisierung. Wir schreiben für eine Klasse $\Gamma = [c]$.
(ii) Eine *orientierte Kurve* ist entsprechend eine Äquivalenzklasse regulärer Kurven, wobei orientierungserhaltende Umparametrisierungen als Äquivalenzrelation verwendet werden. Wir schreiben für eine Klasse $\langle c \rangle$.

Wenn c injektiv ist, so können wir die Kurve Γ mit ihrer Spur $c(I)$ identfizieren.

Beispiele. 1. Die mit verschiedenem Durchlaufsinn durchlaufenen Kreise $(\cos t, \sin t)$ und $(\cos t, -\sin t)$ stellen dieselbe Kurve, aber verschiedene orientierte Kurven dar.
2. Die Kreise $c_i(t) := (\cos t, \sin t)$ für $c_1 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $c_2 \colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ stellen verschiedene Kurven dar, denn die Anzahl der Urbilder ändert sich unter Umparametrisierung nicht.

Bemerkungen. 1. Im Allgemeinen identifiziert man eine Kurve mit einer ihrer Parametrisierungen.
2. Wir wollen explizit erwähnen, dass unsere Kurven Selbstschnitte haben können. Ein Beispiel ist die oben angegebene Lemniskate. Manchmal betrachtet man spezieller eingebettete (d.h. injektive) Kurven. Eingebettete Kurven sind 1-Mannigfaltigkeiten, deren Karten reguläre Kurven sind: die Bedingung $c'(t) \neq 0$ ist die Immersionsbedingung für eine Parametrisierung.

1.2. **Die Bogenlänge.** Als erste Eigenschaft von Kurven, die unabhängig vom Repräsentanten ist, führen wir ein:

Definition. Die *(Bogen-)Länge* einer Kurve $c \colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L(c) = \int_I |c'(t)|\, dt \qquad \in [0, \infty]. \tag{1}$$

Bemerkungen. 1. Das Integral ist die kontinuierliche Version von: „zurückgelegter Weg = Geschwindigkeit mal Zeit".
2. Falls I kompakt ist, kann man das Riemann-Integral abschätzen und es gilt $L(c) < \infty$. Anderenfalls ist L uneigentliches Riemann-Integral oder Lebesgue-Integral und möglicherweise $L(c) = \infty$.

Bemerkung. Um die Beziehung zur Vorlesung Integrationstheorie herzustellen: Das 1-dimensionale Oberflächenmaß auf $\Gamma = [c]$ ist durch das Lebesgue-Integral $L(c) := \int_I \sqrt{\det g}\, dS$ gegeben. Hierbei ist der metrische Tensor die (1×1)-Matrix $g(t) := \langle c'(t), c'(t) \rangle = |c'(t)|^2$.

Wir wiederholen die Ihnen vielleicht schon aus der Analysis bekannte Rechnung, dass die Längenintegrale (1) von $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} = c \circ \varphi\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ übereinstimmen:

$$L(c) = \int_I \bigl|c'(s)\bigr|\, ds \overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\tilde{I}} \bigl|c'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\bigr|\, dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{I}} \bigl|(c \circ \varphi)'(t)\bigr|\, dt = L(\tilde{c})$$

Wir dürfen also auch $L = L(\Gamma)$ schreiben.

Beispiele. 1. Eine *Helix* oder *Schraubenlinie* mit Ganghöhe $2\pi h \in \mathbb{R}$ und Radius $r > 0$ wird durch

$$c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = \bigl(r\cos t, r\sin t, ht\bigr),$$

parametrisiert. Wegen $c'(t) = \bigl(-r\sin t, r\cos t, h\bigr)$ hat sie die Länge

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2}\; dt = (b-a)\sqrt{r^2+h^2}\,.$$

2. Die *Ellipse* mit Halbachsen $a, b > 0$,

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = \bigl(a\cos t, b\sin t\bigr)$$

hat die Geschwindigkeit $|c'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Ihre Länge bzw. ihr Umfang

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\; dt$$

ist nicht elementar integrierbar (*elliptisches Integral*), es sei denn es ist $a = b$, wenn die Ellipse ein Kreis mit Umfang $L(c) = 2\pi a$ ist.

Auf die folgende Parameterdarstellung werden wir häufig zurückgreifen:

Satz 1. *Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung einer orientierte Kurve Γ der Länge $L := L(\Gamma) \in [0,\infty]$. Dann gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi\colon [0,L] \to [a,b]$, so dass der Repräsentant $\tilde{c} := c \circ \varphi\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$ von Γ* nach Bogenlänge parametrisiert ist, *d.h. es gilt $|\tilde{c}'| = 1$.*

Beispiel. Der Kreis vom Radius $r > 0$ wird durch $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ nach Bogenlänge parametrisiert, denn $|c'(t)| = \bigl|(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})\bigr| = 1$.

Beweis. Wir betrachten die Länge der Kurve $c|_{[a,s]}$,

$$\ell\colon [a,b] \to [0,L], \qquad \ell(s) := \int_a^s |c'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Wegen c regulär gilt $\ell'(s) = |c'(s)| > 0$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\varphi := \ell^{-1}$ und φ ist ableitbar mit

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\ell'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|} > 0.$$

Daraus folgt wie gewünscht

$$\bigl|(c \circ \varphi)'(t)\bigr| = \bigl|c'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\bigr| = 1.$$

$\square$

Bemerkung. Zwar ist der Satz einfach zu beweisen, aber dennoch lässt sich in der Praxis oft die Bogenlängen-Parametrisierung nicht explizit angeben, z.B. für Ellipsen.

`2. Vorlesung, Montag 8.5.06` ______________________________

2. Krümmung von Kurven

Der Krümmungsbegriff für ebene Kurven soll folgenden *Postulaten* genügen:

1. Eine Gerade soll Krümmung 0 haben. Ein positiv durchlaufener Kreis vom Radius r soll die Krümmung $1/r$ haben, ein negative durchlaufener $-1/r$.
2. Eine allgemeine Kurve soll als Krümmung im Punkt $c(t)$ die Krümmung eines "bestapproximierenden" Kreises haben.

Wenn dies so ist, dann ist das *Grundpostulat der Differentialgeometrie* erfüllt:

3. Differentialgeometrische Begriffe sind invariant unter Umparametrisierungen. Sie sind auch invariant unter Drehungen und Translationen des $\mathbb{R}^n$.

2.1. Nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven.

Wir wollen zunächst die Normalenabbildung einer Kurve definieren, ohne Bogenlängenparametrisierung zu verlangen:

Definition. Es sei Γ eine orientierte ebene Kurve, die durch eine reguläre Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ repräsentiert sei. Ihre Normale $\nu\colon I \to \mathbb{R}^2$ wählen wir so, dass die Vektoren $\left(\frac{c'}{|c'|}, \nu\right)$ in jedem Punkt der Kurve eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden.

Die Normale erfüllt also $|\nu(t)| = 1$, $\langle \nu(t), c'(t)\rangle = 0$ und $\det(c', \nu) > 0$.

Um eine Formel für die Normale anzugeben, führen wir die orientierte 90-Grad-Drehung ein, also die lineare Abbildung

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dabei soll der Buchstabe J an die Multiplikation mit i erinnern; entsprechend gilt auch $J^2 = -E_2$. Wir erfüllen die Definition von ν, indem wir setzen

$$\nu = J \cdot \frac{c'}{|c'|}.$$

Wenn Γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\nu = Jc'$. Aus unserer Darstellung folgt, dass das Normalenfeld $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{S}^1$ einer orientierten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt ist und stetig ist.

Bei einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve gilt (einfache, aber wichtige Rechnung!):

$$\langle c'', c' \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\langle c', c' \rangle}_{\equiv 1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c'' \perp c' \quad \Leftrightarrow \quad c'' \parallel \nu$$

Weil c'' und ν linear abhänigig sind, können wir definieren:

Definition. Eine ebene orientierte Kurve Γ sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge $c\colon I \to \mathbb{R}^2$. Ihre *Krümmung* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$c'' = \kappa\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle \nu, c'' \rangle = \langle Jc', c'' \rangle. \tag{2}$$

Wir verstehen κ als *Kippgeschwindigkeit des Tangentenvektors.* Deutet man c als Bewegung eines Massepunktes mit Einheitsgeschwindigkeit, so ist c'' natürlich die Größe der Beschleunigung des Massenpunktes. Die Krümmung der Bahnkurve ist die Wirkung dieser Beschleunigung, bzw. der dazu proportionalen Kraft mc''. Wir prüfen Postulat 1 nach:

Beispiele. 1. Für die Gerade $c(t) = tv + b$ mit $v \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$, gilt $c'' \equiv 0$, also auch $\kappa \equiv 0$.

2. Es sei $r \neq 0$. Dann parametrisiert

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \Big(r\cos\frac{t}{r},\, r\sin\frac{t}{r}\Big).$$

einen Kreis vom Radius $|r|$ nach Bogenlänge. Das Vorzeichen von r unterscheidet die Orientierung: Für $r > 0$ mathematisch positiv, für $r < 0$ der Uhrzeigersinn (warum bevorzugen Mathematiker das erste?). Wegen

$$c'(t) = \Big(-\sin\frac{t}{r},\, \cos\frac{t}{r}\Big) \quad \Rightarrow \quad \nu = Jc'(t) = \Big(-\cos\frac{t}{r},\, -\sin\frac{t}{r}\Big) = -\frac{1}{r}c(t) \tag{3}$$

erhält der mathematisch durchlaufene Kreis die innere Normale, der im Uhrzeigersinn durchlaufene die äußere. Vergleichen wir nun

$$c''(t) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r},\, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}\Big) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

mit (3), so finden wir $c'' = \frac{1}{r}\nu$, d.h.

$$\kappa \equiv \frac{1}{r}.$$

Insbesondere hat der mathematische Kreis positive Krümmung.

Bemerkung. Das Vorzeichen der Krümmung ist positiv in Linkskurven, negativ in Rechtskurven. Wenn wir die Orientierung wechseln, also statt c die Kurve $\tilde{c}(t) := c(b - t)$ betrachten, so wechselt die Krümmung ihr Vorzeichen.

Da die Normale die um 90 Grad rotierte Tangente ist, stimmen die Kippgeschwindigkeiten beider Vektoren überein und man kann die Krümmung genausogut durch die *Kippgeschwindigkeit der Normalen* charakterisieren:

Satz 2. *Eine ebene orientierte Kurve* Γ *sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *und habe die Normale* ν*. Dann gilt*

$$\nu' = -\kappa c', \tag{4}$$

bzw. das System von Differentialgleichungen für die Spaltenvektoren c, ν*,*

$$\big(c'', \nu'\big) = \big(c', \nu\big) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Beweis. Differenziation von $\nu = Jc'$ liefert

$$\nu' = (Jc')' = Jc'' = \kappa J\nu = \kappa J^2 c' = -\kappa c'.$$

□

Das autonome lineare System (5) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer ebenen Kurve. Wir werden dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen später für gegebenes κ explizit lösen.

2.2. **Reguläre ebene Kurven.** Viele Kurven lassen sich nicht explizit nach Bogenlänge parametrisieren. Daher benötigt man eine Formel für die Krümmung regulärer Kurven. Wir setzen nun Postulat 3, die Parametrisierungsinvarianz des Krümmungsbegriffs, ein.

Satz 3. *Die Krümmung* $\kappa(t)$ *einer ebenen orientierten Kurve* Γ*, gegeben durch eine reguläre Parametrisierung* c*, ist*

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{|c'|^3}\det(c', c''). \tag{6}$$

Beweis. Es sei $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge. Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi)\varphi', \qquad \tilde{c}'' = (c'' \circ \varphi)\varphi'^{\,2} + (c' \circ \varphi)\varphi''. \tag{7}$$

Wegen $\langle Jc', c'\rangle = 0$ folgt gemäß Postulat 3

$$\kappa = \big\langle J\tilde{c}',\, \tilde{c}''\big\rangle = \big\langle Jc' \circ \varphi,\, c'' \circ \varphi\big\rangle \varphi'^{\,3}$$

Aber der Betrag von (7) liefert $1 = |\tilde{c}'|\varphi'$, so dass wir insgesamt den ersten Ausdruck von (6) erhalten.

Es bleibt noch die zweite Formel zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle Jv, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(v, w),$$

□

2.3. **Raumkurven.** Kurven $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ in höherer Dimension $n \geq 3$ bezeichnen wir als *Raumkurven*, wenn wir sie von ebenen Kurven unterscheiden wollen.

Wir nehmen im folgenden an, dass $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, $|c'| \equiv 1$. Dann gilt auch für Raumkurven $0 = \frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c', c''\rangle$, so dass $c'' \perp c'$.

Definition. Die *Krümmung* einer nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\kappa\colon I \to [0, \infty), \qquad \kappa(t) := |c''(t)|.$$

Wir bezeichnen $c''(t)$ auch als *Krümmungsvektor*. Falls $c''(t) \neq 0$ definieren wir als *Normale*

$$\nu(t) := \frac{c''(t)}{|c''(t)|}.$$

Kurven, für die $\kappa(t) \neq 0$ für alle t gilt, nennt man *Frenet-Kurven*.

Dieser Krümmungsbegriff ist unorientiert, und stets größer gleich Null, und invariant gegenüber der Änderung des Durchlaufsinns. Man kann offenbar im Raum nicht zwischen "Links-" und "Rechts-"Kurven unterscheiden. Bildet man den Betrag der Krümmung einer ebenen Kurve, so erhält man die entsprechende Krümmung als Raumkurve.

Beispiel. Die Raumkurve $c(t) := (t, t^3, 0)$ besitzt in 0 keinen Normalenvektor; die einseitigen Grenzwerte sind verschieden für diesen Punkt. Sie ist keine Frenet-Kurve.

`3. Vorlesung, Montag 15.5.06` ______

Wir betrachten im Rest des Abschnitts den Fall $n = 3$ und setzen stets $\kappa(t) \neq 0$ voraus. Wir ergänzen die Vektoren $c'(t)$ und $\nu(t)$ durch die *Binormale*

$$b(t) := c'(t) \times \nu(t).$$

Das Ergebnis ist eine orientierte Orthonormalbasis $\big(c'(t), \nu(t), b(t)\big)$ für jedes $t \in I$, die man *begleitendes Dreibein* von c in t nennt.

Zusätzlich zur Krümmung κ besitzen Kurven in $\mathbb{R}^3$ noch eine weitere Größe, die *Torsion* (oder *Windung*)

$$\tau(t) := \langle \nu'(t), b(t)\rangle.$$

Die Torsion verschwindet genau dann, wenn die Kurve eben ist (Aufgabe 22). Sie mißt, wie stark die Kurve von einer ebenen Kurve abweicht, d.h. wie stark ν um c' dreht. Man sagt auch, die Torsion misst die Drehgeschwindigkeit der *Schmiegebene* $\operatorname{span}\{c'(t), \nu(t)\}$.

Beispiel. Jede Helix $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$, $r > 0$, $h \in \mathbb{R}$, hat konstante Krümmung und Torsion. Dies folgt auch daraus, daß diese Begriffe invariant unter Bewegungen sind, und Schraubbewegungen transitiv auf der Helix operieren. Siehe auch Aufgabe 19.

Wie im ebenen Falle erhält man ein Differentialgleichungssystem:

Satz 4. *Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Dann erfüllt das Dreibein (c', ν, b) von Spaltenvektoren das Differentialgleichungssystem*

$$(c'', \nu', b') = (c', \nu, b) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Den Beweis lassen wir als Übung 25.

Das autonome lineare System (8) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer Raumkurve. Entsprechende Differentialgleichungssysteme erhält man auch für den Fall $n \geq 4$.

3. Vier Charakterisierungen der Krümmung

Wir geben nun einige Eigenschaften von Kurven an, für die die Krümmung wesentlich ist. Diese Eigenschaften sind lokal, d.h. durch die Kenntnis der Kurve in einer Umgebung eines Punktes bestimmt. Wir beschränken uns auf ebene Kurven.

3.1. **Graphen und lokale Normalform.** Der Graph einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (es reicht C^2) läßt sich als orientierte Kurve $c(t) := \big(t, f(t)\big)$ auffassen. Dieser Orientierung entspricht die Wahl der oberen Normalen ν mit $\nu_2 > 0$. Nach (6) hat c die Krümmung

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}^3}\left\langle \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^3}.$$

Genau dann, wenn die Tangente horizontal ist, ist die Krümmung die zweite Ableitung:

$$f'(t_0) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \kappa(t_0) = f''(t_0) \tag{9}$$

Beispiele. 1. Die Parabel $c(t) := (t, t^2)$ hat in 0 horizontale Tangente, $f'(0) = 0$, und daher in 0 die Krümmung $(t^2)''|_{t=0} = 2$.
2. Der im Uhrzeigersinn parametrisierte Kreisbogen $c(t) := (t, \sqrt{1-t^2})$ hat in 0 die Krümmung $\big(\sqrt{1-t^2}\big)''|_{t=0} = \big(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\big)'|_{t=0} = -1$.

Umgekehrt wollen wir nun jede reguläre Kurve $c(t)$ als Graph über ihrer Tangentialrichtung schreiben; natürlich geht das nur lokal.

Satz 5. *Es sei Γ eine orientierte Kurve, repräsentiert durch $c\colon I \to \mathbb{R}^2$. Im Punkt $P = c(t_0)$ habe c die Tangente $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ und die Normale $N := JT$. Sei ferner κ die Krümmung von c im Punkt t_0. Dann gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to I$ mit $\varphi(0) = t_0$, so dass $\tilde{c} := c \circ \varphi$ die* lokale Normalform *besitzt*

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{10}$$

Überlegen Sie: Kann die Darstellung $\tilde{c}$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge sein?

Beweis. Setzen wir $s(\tau) := \big\langle c(\tau) - P, T\big\rangle$, so soll für die Parametertransformation φ gelten:

$$s(\varphi(t)) = \big\langle c(\varphi(t)) - P, T\big\rangle = \langle \tilde{c}(t) - P, T\rangle \overset{(10)}{=} t.$$

Wir erfüllen aber $s(\varphi(t)) = t$ und $\varphi(0) = t_0$ genau dann, wenn wir φ als lokale Umkehrfunktion $\varphi := s^{-1}$ wählen; tatsächlich existiert s^{-1} lokal, denn es gilt $s'(t_0) = \langle c'(t_0), T\rangle = |c'(t_0)| > 0$.

Setzen wir $f(t) := \big\langle \tilde{c}(t) - P, N\big\rangle$, so folgt

$$\tilde{c}(t) = P + tT + f(t)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{11}$$

Offenbar gilt für $t = 0$, dass $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = \big\langle c'(\varphi(0))\varphi'(0), N\big\rangle = \big\langle c'(t_0)\varphi'(0), N\big\rangle = 0.$$

Die Taylorreihe von f lautet also

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2}t^2 f''(0) + O(t^3) \overset{(9)}{=} \frac{1}{2}t^2\kappa + O(t^3).$$

Einsetzen in (11) ergibt (10). □

Wir können aus (10) beispielsweise ablesen:

Korollar 6 (Lokale Konvexität). *Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so liegt die Kurve $\Gamma = [c]$ in einer Umgebung von $c(t_0)$ auf einer Seite des Tangentialraums $T_{c(t_0)}\Gamma$, d.h. für sämtliche t mit $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ gilt entweder $\big\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0)\big\rangle > 0$ oder < 0.*

Tatsächlich ist für eine eingebettete geschlossene Kurve sogar äquivalent: Das von der Kurve links berandete Gebiet ist konvex $\Leftrightarrow$ $\kappa(t) \geq 0$ für alle t (siehe Übung 17).

Bemerkung. Für reguläre Raumkurven gibt es eine entsprechende Normalform. Setzt man $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ und $N := \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|}$, so findet man wie zuvor eine Umparametrisierung mit

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3); \tag{12}$$

allerdings steht $O(t^3) \in T^\perp \subset \mathbb{R}^n$ diesmal für einen Vektor.

3.2. **Krümmung als inverser Radius des Schmiegkreises.** Wir wollen das zu Beginn von Abschnitt 2 genannte Postulat 2 nachprüfen.

Aus Korollar 6 folgt:

Lemma 7. *Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Tripel $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ liegen die drei Punkte $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$ nicht auf einer Geraden.*

Beweis. Wegen der Stetigkeit von κ kann man ε so wählen, dass $\kappa \neq 0$ noch auf einem Intervall $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt. Von der Geraden g durch $c(t_2)$ und $c(t_1)$ liegt dann nur ein Strahl auf derjenigen Seite des Tangentialraums $T_{c(t_2)}$, die nach Kor. 6 die Kurve enthält. Also kann g den dritten Punkt $c(t_3)$ nicht treffen. $\square$

`4. Vorlesung, Montag 22.5.06` ______________________________

Unter den Voraussetzungen des Lemmas sei $K(t_1, t_2, t_3)$ der Kreis durch die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$; wir benötigen nur seinen Mittelpunkt $M(t_1, t_2, t_3)$. Wir wollen den am besten approximierenden Kreis nun als Grenzwert dieser Kreise definieren; dabei wollen wir sagen, dass eine Folge von Kreisen konvergiert, wenn Mittelpunkte und Radien konvergieren.

Satz 8. *Es sei c nach Bogenlänge parametrisiert und $c''(t_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert*

$$K(t_0) = \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} K(t_1, t_2, t_3),$$

der sogenannte Schmieg- *oder* Krümmungskreis *von c in t_0. Er hat den Mittelpunkt*

$$M(t_0) := \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} M(t_1, t_2, t_3) \;=\; c(t_0) + \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}.$$

und damit den Radius $\frac{1}{|c''(t_0)|} = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Beweis. Wir wählen ε wie im Lemma. Für $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $h(t) := \frac{1}{2}\big|c(t) - M(t_1, t_2, t_3)\big|^2$. Sie erfüllt $h(t_1) = h(t_2) = h(t_3)$, weil die drei Punkte $c(t_i)$ auf dem Kreis liegen. Daher liefert der Mittelwertsatz die Existenz von $\xi_1 \in (t_1, t_2)$ und $\xi_2 \in (t_2, t_3)$, so dass gilt

$$0 = h'(\xi_i) = \big\langle c'(\xi_i),\, c(\xi_i) - M(t_1, t_2, t_3)\big\rangle, \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes liefert ein $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, so dass

$$0 = h''(\eta) = \big\langle c''(\eta),\, c(\eta) - M(t_1, t_2, t_3)\big\rangle + \underbrace{|c'(\eta)|^2}_{=1}.$$

Im Grenzwert $t_1, t_2, t_3 \to t_0$ gehen auch ξ_i und η gegen t_0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben

$$\big\langle c'(t_0),\, c(t_0) - M(t_0)\big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \big\langle c''(t_0),\, c(t_0) - M(t_0)\big\rangle = -1.$$

Wegen $c'(t_0) \perp c''(t_0)$ folgt daraus wie gewünscht $c(t_0) - M(t_0) = -\frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}$; insbesondere existiert der Grenzwert $M(t_0)$ tatsächlich. $\square$

Wir verzichten hier auf die Behandlung des Falles $c''(t_0) = 0$.

Bemerkung. Entsprechend kann man Raumkurven durch einen Krümmungskreis im Raum approximieren; man muss dann die Normalform (12) benutzen.

3.3. **Länge von Parallelkurven.** Ist $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve, so nennen wir die parametrisierte Kurve

$$c_d(t) := c(t) + d\nu(t)$$

eine *Parallelkurve* zu c im Abstand $d \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Ein positiv orientierter Kreis vom Radius r hat als Parallelkurven Kreise vom Radius $|r-d|$ (für $d = r$ ist dies ein Punkt).

Ist c' regulär, so hat nach (4) die Parallelkurve den Tangentenvektor

$$c_d' = c' + d\nu' = (1 - d\kappa)c'. \tag{13}$$

Gilt also $1 - d\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so ist auch c_d regulär.

Wir verlangen von nun an für t, d die stärkere Bedingung

$$1 - d\kappa(t) > 0. \tag{14}$$

Ist beispielsweise $|\kappa| \le K \neq 0$ (ein solches K existiert immer für I kompakt), so ist (14) erfüllt für $d \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$, denn $1 - d\kappa(t) \ge 1 - |d||\kappa(t)| \ge 1 - |d|K > 0$.

Aus (13) folgt $Jc_d' \parallel Jc'$; gilt zusätzlich (14), so zeigen beide Vektoren in die gleiche Richtung. Also folgt

$$\nu_d(t) = \nu(t) \qquad \text{für alle } t \in I$$

und die Normalen ändern sich beim Übergang zu jeder Parallelkurve c_d nicht. Weiterhin folgt aus (14), dass $|c_d'| = (1 - d\kappa)|c'|$, was durch Integration ergibt:

Satz 9. *Ist $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert, und gilt (14) für alle $t \in I$ und $d \in \mathbb{R}$, so haben die Parallelkurven $c_d(t) = c(t) + d\nu(t)$ die Länge*

$$L(c_d) = L(c) - d \int_a^b \kappa(t)\, dt. \tag{15}$$

Die Funktion $d \mapsto L(c_d)$ ist also linear! Um die Krümmung zu messen, genügt es damit, das Längenelement von Parallelkurven zu bestimmen; genauer folgt aus (15) nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\kappa(t_0) = \frac{1}{d} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \big(L(c(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) - L(c_d(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \big).$$

3.4. **Die Ableitung des Tangentenwinkels.** Wie kann man Winkel darstellen?
• Repräsentiert man sie eindeutig durch das Intervall $[0, 2\pi)$, so sind sie unstetig.
• Wählt man sie stetig, so muss man sie als reelle Zahl auffassen, und sie sind nicht mehr eindeutig.

Weil wir Winkel noch differenzieren wollen, entscheiden wir uns für die zweite Variante:

Lemma 10. *Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert. Dann gibt es eine glatte Funktion $\vartheta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass*

$$c'(t) = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big) \tag{16}$$

Jede andere solche Funktion unterscheidet sich von ϑ nur um Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π.

Entsprechendes gilt für jede andere $\mathbb{S}^1$-wertige Funktion an Stelle von c'. In der Topologie bezeichnet man ϑ als den *Lift* oder die *Hochhebung* der $\mathbb{S}^1$-wertigen Abbildung c' in die *Überlagerung* $\mathbb{R}$ von $\mathbb{S}^1$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines Liftes sukzessive in drei Fällen:
1. c' hat Werte im rechten Halbkreis $\mathbb{S}^1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$.
2. c' hat Werte in einem festen Halbkreis $\mathbb{S}^1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v\rangle > 0\}$ für $v \neq 0$.
3. Allgemeiner Fall.

1. Ist $v \in \mathbb{S}^1$ ein Vektor mit $v_1 > 0$, so gilt:

$$v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad\iff\quad \tan\vartheta = \frac{v_2}{v_1} \quad\iff\quad \exists n \in \mathbb{Z} : \vartheta = \arctan\frac{v_2}{v_1} + 2\pi n.$$

Für die zweite Äquivalenz muss man beachten, dass tan die Periode π hat; allerdings gilt $v_1 = \cos\vartheta > 0 \Leftrightarrow \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2\pi\mathbb{Z}$.

Wir können also setzen

$$\vartheta(t) := \arctan\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)} + 2\pi n(t) \tag{17}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt aber: ϑ stetig $\Leftrightarrow$ n konstant; für c' glatt ist nach (17) dann auch ϑ glatt.

2. Nach Drehung um einen Winkel $-\varphi$ liegt das Bild von c' im rechten Halbkreis. Man wendet darauf (17) an, und addiert zu ϑ dann φ.

3. Die Funktion $c'\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon = \sqrt{2}$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass aus $|s - t| < \delta$ folgt $\big|c'(s) - c'(t)\big| < \sqrt{2}$. Also liegt das Bild jedes Intervalls $(t - \delta, t + \delta)$ in einem Halbkreis. Wir zerlegen nun $[a,b]$ in endlich viele Intervalle der Form $I_k := \big(a + (k-1)\delta,\ a + (k+1)\delta\big) \cap [a,b]$ mit $k = 0, \ldots, k_0$. Wir wollen Induktion benutzen. Auf I_0 liefert Schritt 2 einen Lift; dabei ist $n \in \mathbb{Z}$ frei wählbar. Hat man auf I_k schon einen

Lift gewählt, so ist durch Schritt 2 eine eindeutige stetige Fortsetzung nach I_{k+1} bestimmt (sogar glatt für c' glatt). □

Aus (16) folgt $c'' = \vartheta'\big(-\sin\vartheta, \cos\vartheta\big) = \vartheta'\nu$. Durch Vergleich mit (2) erhalten wir

$$\kappa = \vartheta' \tag{18}$$

als eine Charakterisierung der Krümmung: Die Krümmung ist die Rotationsgeschwindigkeit des Tangentenvektors.

Wir wollen die Gleichung nun zweimal aufintegrieren, wobei wir annehmen, dass c auf $[a, b]$ definiert ist: Erstens ist

$$\vartheta(s) = \vartheta(a) + \int_a^s \kappa(\sigma)\, d\sigma$$

und zweitens

$$c(t) - c(a) = \int_a^t c'(s)\, ds = \int_a^t \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_a^t \cos\big(\vartheta(a) + \int_a^s \kappa(\sigma)\, d\sigma\big)\, ds \\ \int_a^t \sin\big(\vartheta(a) + \int_a^s \kappa(\sigma)\, d\sigma\big)\, ds \end{pmatrix}.$$

Dies ist die explizite Lösung des Differentialgleichungssystems (5):

Satz 11 (Hauptsatz für ebene Kurven)**.** *Es seien $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ glatt (bzw. stetig), $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{S}^1$, und $t_0 \in I$. Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene glatte (bzw. C^2-)Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, die in t die Krümmung $\kappa(t)$ hat, sowie die Anfangswerte $c(t_0) = p$, $c'(t_0) = v$.*

Es folgt: Gerade und Kreise sind die einzigen ebenen Kurven konstanter Krümmung.

Bemerkungen. 1. Für Raumkurven gibt es ebenfalls einen Hauptsatz, d.h. zu vorgegebener Krümmung und Torsion gibt es eine Kurve in $\mathbb{R}^3$; sie ist eindeutig bestimmt bis auf Bewegungen (oder durch entsprechende Anfangsbedingungen). Also sind beispielsweise Helices die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion. Weil man keinen Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mehr zur Verfügung hat, muss man das Differentialgleichungssystem (8) mit einem abstrakten Satz lösen: Das Problem wird auf den Satz von Picard-Lindelöf zurückgeführt (siehe [B], S.70ff).

2. (vgle. Spallek [Sp] S. 57/58]) Straßenkurven werden mit κ stückweise linear in t trassiert, damit beim Autofahren der Lenkradeinschlag zu einer stetigen Funktion der Zeit wird. Nach Satz 11 existieren Kurven c mit κ linear; sie heissen *Klothoiden* oder Straßenbauer-Spiralen und sind nicht elementar integrierbar (siehe Aufgabe 13). Sie werden so aneinander gesetzt, dass die entstehende Kurve, also die Straße, der Klasse C^2 angehört. Bis 1937 wurden Straßen offenbar nur als C^1-Kurven trassiert. Im Eisenbahnbau hat man bereits länger C^2-Kurven verwendet, jedoch arbeitet man mit Stücken kubischer Parabeln. Im allgemeinen muss man mit Raumkurven arbeiten.

`6. Vorlesung, Montag 12.6.06` ______________________________

3.5. **Ausblick: Globale Eigenschaften ebener Kurven.** Die Krümmung ist eine lokale Eigenschaft einer orientierten Kurve: Es reicht, die Kurve in der Umgebung eines Punktes zu kennen, um sie für diesen Punkt zu berechnen. Auch die Bogenlänge kann man auf Teilstücken berechnen, ohne dass der Rest der Kurve das Ergebnis beeinflusst.

Globale Aussagen sind dagegen Aussagen, die die Kenntnis der ganzen Kurve voraussetzen. Wir geben einige Aussagen für *geschlossene* reguläre ebene Kurven an, also Abbildungen $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(a) = c(b)$, $c'(a) = c'(b)$, $c''(a) = c''(b)$. Die Kurve c heisst *einfach* oder eingebettet, wenn $c|_{[a,b)}$ injektiv ist. Wir geben einige Beispiele solcher Aussagen an, auch wenn wir sie in dieser Vorlesung nicht näher behandeln können (man findet Beweise z.B. in Bär [B]).

Vierscheitelsatz:
Eine einfach geschlossene ebene Kurve hat mindestens vier Punkte, in denen die Krümmung kritisch ist (dass sie zwei hat, ist klar – warum?).

Jordanscher Kurvensatz:
Jede einfach geschlossene ebene Kurve zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei Zusammenhangskomponenten, davon eine kompakt (das *Innengebiet*) die andere nicht kompakt. Der Satz gilt sogar für C^0-Kurven.

Isoperimetrische Ungleichung:
Unter allen einfach geschlossenen ebenen Kurven ist der Einheitskreis diejenige Kurve, die ein Gebiet des Flächeninhalts π mit kürzester Länge berandet.

`5. Vorlesung, Montag 29.5.06` ________________________________

4. Bézierkurven

In Anwendungen sucht man konkrete Kurven, um eine Kontur konstruktiv zu beschreiben, z.B. für ein Logo oder zur Schriftendefinition, oder auch um einen Bewegungsvorgang zu steuern. Für solche Anwendungen unterscheidet man *Regelkurven* von *Freiformkurven.* Regelkurven lassen sich aus elementaren geometrischen Objekten ableiten, wie z.B. Gerade, Ellipse oder weitere Kegelschnitte. Freiformkurven dagegen können in ihrer Form weitgehend frei vorgeschrieben werden. Sie werden typischerweise am Computer interaktiv modelliert.

Die Anfänge der zugehörigen Theorie polynomialer Kurven gehen auf Ideen zurück, die einerseits in der reinen Mathematik (Splinetheorie) und andererseits mit dem Aufkommen der Computertechnologie in der Automobilindustrie vor etwa 40 Jahren entstanden sind. Mittlerweile haben sich hieraus auf der Seite der Anwendungen das CAD/CAM (Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing) und die Computergrafik als industrielle

Schlüsseltechnologien entwickelt. Auf Seite der Mathematik beschäftigt sich die *Geometrische Datenverarbeitung* mit der Untersuchung der zugrundeliegenden theoretischen Konzepte.

Im folgenden Abschnitt werden exemplarisch Bézierkurven vorgestellt. Eine vertiefte Diskussion ist Gegenstand der Vorlesungen über Geometrische Datenverarbeitung und Splineapproximation.

4.1. **Bernstein-Polynome.** In der Umgebung eines Punktes approximiert man eine Funktion typischerweise durch ein Taylorpolynom. Der Approximationssatz von Weierstrass sagt, dass man sogar auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$ eine Funktion gleichmäßig durch Polynome approximieren kann.

Es ist daher naheliegend, Kurven zu approximieren, indem man *polynomiale Kurven* verwendet, d.h. Kurven $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$, die in jeder Komponente ein Polynom in t sind. Sie sind selbstverständlich glatt, brauchen aber nicht unbedingt regulär sein.

Das folgende System von Polynomen führte S. Bernstein ein, um den Approximationssatz von Weierstrass konstruktiv zu beweisen. Durch Ausmultiplizieren der Identität

$$1 \equiv \big((1-t)+t\big)^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

erhält man nach dem binomischen Satz

$$1 \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k. \tag{19}$$

Die Summanden

$$b_k^n(t) := \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad k = 0, \dots, n, \quad t \in [0,1], \tag{20}$$

heißen *Bernstein-Polynome* vom Grad n. Wir setzen weiter $b_k^n(t) :\equiv 0$ für $k < 0$ und $k > n$.

Beispiele. 1. Für $n = 1$ erhält man $b_0^1 = (1-t)$ und $b_1^1 = t$.
2. Für $n = 2$ erhält man $b_0^2 = (1-t)^2$, $b_1^2 = 2(1-t)t$ und $b_2^2 = t^2$.

Satz 12. *Die Bernstein-Polynome haben die folgenden Eigenschaften:*
(i) Partition der Eins: $\sum_{k=0}^n b_k^n(t) \equiv 1$,
(ii) Nicht-Negativität: $b_k^n(t) \geq 0$ *für* $t \in [0,1]$,
(iii) Symmetrie: $b_k^n(t) = b_{n-k}^n(1-t)$,
(iv) Basis: Die $n+1$ *Bernstein-Polynome vom Grad* n *spannen den* $n+1$*-dimensionalen Vektorraum der Polynome vom Grad* $\leq n$ *auf:*

$$\operatorname{span}\{b_0^n(t), \dots, b_n^n(t)\} = \operatorname{span}\{1, t, \dots, t^n\},$$

(v) *Rekursion: Es gilt* $b_0^0(t) = 1$ *und*

$$b_k^n(t) = t\, b_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t)\, b_k^{n-1}(t). \tag{21}$$

Die Behauptungen (i) - (iii) sind klar, (iv) folgt aus $b_k^n(t) = t^k + O(t^{k+1})$, (v) aus der vom Pascalschen Dreieck bekannten Identität $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

4.2. **Bézierkurven.** Wir benutzen nun Bernstein-Polynome, um Kurven zu definieren:

Definition. Seien $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ Punkte im d-dimensionalen Raum, dann definiert

$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d, \quad c(t) := \sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) p_k,$$

eine polynomiale Kurve vom Grad $\leq n$. Man nennt c die *Bézierkurve* zu den *Kontrollpunkten* p_k. Die stückweise geradlinige Verbindung der Kontrollpunkte ergibt das *Kontrollpolygon.*

Beispiel. Für $n = 1$ parametrisiert $c(t) = (1-t)p_0 + tp_1$ eine Strecke von p_0 nach p_1.

Neben dem formalen Zusammenhang zwischen den Kontrollpunkten und den Kurvenpunkten, der durch die Bernstein-Polynome hergestellt wird, besteht eine intuitiv leicht zu erfassende Verwandschaft zwischen der Gestalt des Kontrollpolygons und der Spur der zugehörigen Bézierkurve. Am Computer kann man deshalb durch Manipulation der Kontrollpunkte zielgerichtet eine Freiformkurve einer gewünschten Gestalt erzeugen.

Dieser „intuitive“ Zusammenhang lässt sich mit den im folgenden besprochenen Eigenschaften erklären (und Aufgabe 26).

1. *Symmetrie.* Einer Umkehrung der Reihenfolge der Kontrollpunkte entspricht eine Umkehrung der Orientierung der Bézierkurve,

$$c(1-t) = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(1-t) p_k \overset{\text{Symm. der } b_k^n}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) p_{n-k}.$$

2. *Randinterpolation und -tangenten.* Es gilt

$$c(0) = p_0, \quad c'(0) = n(p_1 - p_0), \qquad c(1) = p_n, \quad c'(1) = n(p_n - p_{n-1}).$$

Dies zeigt man wie folgt. Aus $b_0^n(0) = 1$ und $b_k^n(0) = 0$ für $k \geq 1$ folgt $c(0) = p_0$. Weiter ist

$$\begin{aligned} c'(0) &= \sum_{k=0}^{n} (b_k^n)'(0)\, p_k \\ &= \frac{d}{dt}(1-t)^n\Big|_{t=0} p_0 + \frac{d}{dt} n(1-t)^{n-1}t\Big|_{t=0} p_1 + \sum_{k\geq 2} \frac{d}{dt}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k\Big|_{t=0} p_k \\ &= -np_0 + np_1 + 0 = n(p_1 - p_0). \end{aligned}$$

Die Formeln für $c(1)$, $c'(1)$ folgen aus der Symmetrie.

Konsequenz: Eine quadratische Bézierkurve hat als Kontrollpunkte die beiden Endpunkte der Kurve und den Schnittpunkt ihrer Tangentengeraden.

3. *Konvexe Hüllen-Eigenschaft.* Eine Linearkombination $\sum_{k=0}^n a_k p_k$ heißt *Konvexkombination*, wenn $\sum_{k=0}^n a_k = 1$ und $0 \leq a_k \leq 1$ für alle k gilt. Der Name kommt daher, dass die Menge K aller Konvexkombinationen der Punkte $p_0, \ldots, p_n$ *konvex* ist, d.h. zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in K$ liegt auch die Verbindungsstrecke $\{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$ ganz in K. Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige Menge, so kann man die *konvexe Hülle* von M dadurch definieren, dass man die Menge aller Konvexkombinationen von endlichen Teilmengen von M nimmt; dies ist zugleich die kleinste konvexe Menge, die M enthält. Aus der Partition der Eins (19) folgt sofort:

Die Spur $c([0,1])$ einer Bézierkurve liegt in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte $p_0, \ldots, p_n$.

4. *Affine Invarianz.* Bézierkurven sind ein Objekt der Geometrie in dem Sinne, dass sie unabhängig von der Spezifikation eines Koordinatensystems aus ihren Kontrollpunkten hervorgehen. Betrachten wir dazu eine affine Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^{d'}$, $A(x) = Lx + T$ mit $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ linear, $T \in \mathbb{R}^{d'}$. Dann gilt für eine Bézierkurve c zu Kontrollpunkten $p_0, \ldots, p_n$

$$A(c(t)) = L(c(t)) + T = L\Big(\sum_{k=0}^n b_k^n(t) p_k\Big) + T = \sum_{k=0}^n b_k^n(t) L(p_k) + 1 \cdot T \overset{1=\sum b_k^n}{=} \sum_{k=0}^n b_k^n(t) A(p_k).$$

Das affine Bild der Bézierkurve ist also gerade die Bézierkurve zum affinen Bild ihrer Kontrollpunkte.

5. *Variationsminderung.* Diese Eigenschaft besagt, dass Bézierkurven nicht „welliger“ als ihr Kontrollpolygon sind, so dass sie ihre Kontrollpunkte glätten: Schneidet eine Hyperebene H ein Kontrollpolygon in k Punkten, so ist die Anzahl der Schnitte von H mit der Bézierkurve $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ höchstens k. Der Beweis ist nicht einfach.

4.3. **Auswertung.** Wir fixieren ein $t_0 \in [0,1]$ und wollen die Bézierkurve $c(t) = \sum_k b_k^n(t) p_k$ an der Stelle t_0 auswerten. Aus der Rekursionsformel (21) der Bernstein-Polynome erhalten wir zunächst

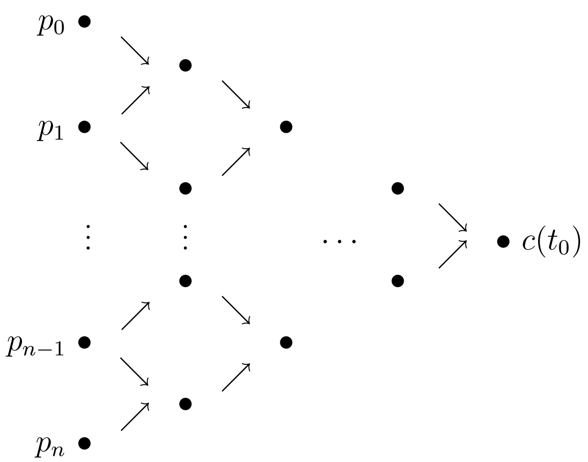
$$\begin{aligned} c(t_0) &= \sum_{k=0}^n b_k^n(t_0) p_k = \sum_{k=0}^n \big(b_{k-1}^{n-1}(t_0) + (1-t_0)\, b_k^{n-1}(t_0)\big) p_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{n-1}(t_0) \big(\underbrace{(1-t_0)\, p_k + t_0\, p_{k+1}}_{=:\tilde{p}_k(t_0)}\big). \end{aligned}$$

Geometrisch erhält man die $n-1$ Punkte $\tilde{p}_k(t_0)$ durch Teilung jeder Seite des Kontrollpolygons im Verhältnis $1-t_0$ zu t_0. Definiert man bezüglich der neuen Kontrollpunkte $\tilde{p}_k(t_0)$ eine Bézierkurve $\tilde{c}$ vom Grad $\le n-1$,

$$\tilde{c}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{n-1}(t)\, \tilde{p}_k(t_0),$$

so gilt an der Stelle t_0, dass $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$.

Eine iterative Anwendung dieser Konstruktion führt auf den Algorithmus von *de Casteljau*. Bei diesem wird ausgehend von den gegebenen Kontrollpunkten $p_0, \dots, p_n$ ein Dreiecksschema der Form



berechnet, an dessen Spitze der gesuchte Wert $c(t_0)$ zu finden ist. Dabei steht der Pfeil $\nearrow$ für die Multiplikation mit t_0 und der Pfeil $\searrow$ für die Multiplikation mit $(1-t_0)$. Das gesamte Schema basiert also auf einer fortgesetzen Bildung von Mittelwerten mit festen Gewichten. In den aufeinanderfolgenden Spalten stehen die Kontrollpunkte für Bézierkurven absteigenden Grades, die alle mit der ursprünglich gegebenen Kurve im Punkt t_0 übereinstimmen. Die letzte Spalte gehört also zu einer Kurve von Grad 0, deren konstanter Wert mit dem einzigen Kontrollpunkt übereinstimmt.

Zur Berechnung der ersten Ableitung einer Bézierkurve verifiziert man zunächst

$$(b_k^n)'(t) = n\big(b_{k-1}^{n-1}(t) - b_k^{n-1}(t)\big).$$

Man kann daher die Ableitung aus Differenzen der Kontrollpunkte berechnen:

$$c'(t) = n \sum_k b_k^{n-1}(t)\big(p_{k+1} - p_k\big). \tag{22}$$

Ableitungen höherer Ordnung lassen sich iterativ aus (22) berechnen. Aus (22) kann man sehen, dass Bézierkurven im allgemeinen nicht regulär sind.

5. Übungsaufgaben

5.1. **Bogenlänge, Umparametrisierung.**

Aufgabe 1 – Polarkoordinaten und Logarithmische Spirale (Reif 08):

Gegeben sei eine Kurve der Form

$$c(t) = \big(r(t)\cos t,\, r(t)\sin t\big), \quad t \in I.$$

a) Bestimmen Sie $|c'(t)|$. Welche Bedingung muss die Funktion r erfüllen, damit c regulär ist?

b) Sei nun speziell $r(t) = e^{-t}$ und $I = [0, \infty)$. Skizzieren sie die Spur der Kurve, berechnen Sie die Länge $L(c)$ und geben Sie die Parametrisierung $\tilde{c}$ von $[c]$ nach der Bogenlänge an.

Aufgabe 2 – Länge einer Kurve und Bogenlänge (Bergner 04):

Gegeben ist die Kurve

$$c(t) : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad c(t) := \left(t^2, t\sqrt{1-t^2}\right) .$$

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve c nach Bogenlänge an.

c) Zeigen Sie $\lim_{t\to+1} c(t) = \lim_{t\to-1} c(t)$, d.h. die Kurve ist geschlossen.
Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm1} c'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 – Umparametrisierung (Bergner 04):

Welche Parametrisierungen repräsentieren dieselbe orientierte Kurve?

$$\begin{aligned}
c_1(t) &:= (\cos t, \sin t) \quad , \ t \in (0, \pi) \\
c_2(t) &:= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t) \quad , \ t \in (0, \pi) \\
c_3(t) &:= (t, \sqrt{1-t^2}) \quad , \ t \in (-1, 1) \\
c_4(t) &:= \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right) \quad , \ t \in (-\infty, +\infty)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 – Umparametrisierung als Äquivalenzrelation:

a) Zeigen Sie, dass Umparametrisierung eine Äquivalenzrelation auf der Menge

$$\mathcal{C} := \left\{c \in C^1\big([0,1], \mathbb{R}^n\big), c'(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in (0,1)\right\}$$

darstellt. Zeigen Sie dies auch für orientierungstreue Umparametrisierung.

b) Zeigen Sie, dass es in $\langle c\rangle$ genau eine Parametrisierung $\tilde{c}$ nach der Bogenlänge gibt.
Hinweis: Die Existenz einer derartigen Parametrisierung wurde bereits in der Vorlesung gezeigt. Nehmen Sie also an, dass es zwei verschiedene Parametrisierungen nach der Bogenlänge gibt.

Aufgabe 5 – Geraden sind am kürzesten (GB 02):

Schließen Sie aus dem Folgenden, dass die Gerade $g(t) := (t, 0)$ für $t \in [0, 1]$ die kürzeste Verbindung der Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ ist.

a) Zeigen Sie, dass die Länge der Gerade g gleich 1 ist.
b) Sei $c\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (0, 0)$ sowie $c(1) = (1, 0)$ eine Kurve mit $c(t_0) \notin [0, 1] \times \{0\}$ für ein $t_0 \in [0, 1]$. Zeigen Sie für ihre Länge $L(c) > 1$.

Aufgabe 6 – Die Kettenlinie (GB 05):

Ein Seil sei an seinen beiden Endpunkten befestigt. Wir bestimmen hier die Form der Kurve, die das Seil beschreibt.

Wir nehmen an, die beiden Punkte liegen nicht übereinander und die Kurve läßt sich schreiben als Graph

$$\{(x, f(x)), x \in [0, b]\}.$$

Zu $0 \le t \le b$ betrachten wir das Teilstück $(x, f(x))$ der Kurve mit $0 \le x \le t$. Die Tangentialvektoren in dessen Endpunkten, $T_0 := \big(1, f'(0)\big)$ und $-T_t := -\big(1, f'(t)\big)$, entsprechen den tangential nach innen wirkenden Kräften. Beachten Sie, dass wir die Längen von $T_0, -T_t$ bereits so gewählt haben, dass die Kräfte Horizontalkomponenten 1 bzw. -1 besitzen, die sich ausgleichen.

a) Formulieren Sie eine Kräftebilanz für die Vertikalkomponenten der Kräfte: Die vom Seil ausgeübte Gewichtskraft entspricht dem ρ-fachen der Länge des Teilstücks, für $\rho > 0$. Sie ist gleich der Summe der beiden Vertikalkomponenten von T_a und T_t.
b) Leiten Sie aus a) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung her.
c) Lösen Sie die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. Hatte Galilei 1638 recht, der die Lösungskurve als eine Parabel bestimmte?

Noch zwei Bemerkungen:
1. Eine andere und vielleicht bessere Herleitung der Kettenlinie ergibt sich variationell: Die Kettenlinie ist diejenige Form einer hängenden Kurve, bei der der Schwerpunkt am tiefsten liegt.
2. Anwendungen der Kettenlinie in der Architektur benutzen die Umkehrung, eine stehende Kettenlinie; sie befindet sich genauso im Gleichgewicht (vergleiche Experiment im Mathematik-Museum in Gießen).

5.2. **Krümmung ebener Kurven.**

Aufgabe 7 – Ellipse (GB 02):

Berechnen Sie die Krümmung κ einer Ellipse $c(t) = \big(a \cos t, b \sin t\big)$, wobei $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. In welchen Punkten wird die Krümmung maximal bzw. minimal? Diese Punkte nennt man *Scheitelpunkte*.

Aufgabe 8 – Traktrix (GB 02):

Die *Schleppkurve* oder *Traktrix* ist die Kurve

$$c(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \quad ; \; t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $c(t)$ regulär für alle $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.

b) Der Abstand zwischen $c(t)$ und dem Schnittpunkt der y-Achse und der Tangentengerade $\{c(t) + sc'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ist konstant für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

c) Skizzieren Sie die Kurve c und berechnen Sie ihre Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 9 – Graphen als Kurven (Bergner 04):

Zu einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erklären wir die Kurve

$$c(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \big(t, f(t)\big)\ .$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $c(t)$ regulär?

b) Ermitteln Sie die Normale $\nu(t)$.

c) Geben Sie eine Parametrisierung von c nach Bogenlänge an.

d) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 10 – Krümmung unter linearen Abbildungen (GB 02):

Gegeben sei eine Kurve $c(t)\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa(t)$ sowie eine 2×2-Matrix A. Berechnen Sie die Krümmung $\tilde\kappa(t)$ der Kurve $\tilde c(t) := Ac(t)$ in Abhängigkeit von $\kappa(t)$. Was passiert im speziellen Fall einer orthogonalen Matrix A (d.h. $A^tA = E$)?

Aufgabe 11 – Krümmung und Normale auf Äquivalenzklassen (Reif 08):

Sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve.

a) In $[c]$ gibt es genau eine weitere Parametrisierungen $\hat c$ nach der Bogenlänge. Wie hängen $\tilde c$ und $\hat c$ miteinander zusammen?

b) In welchem Zusammenhang stehen die Krümmungen $\tilde\kappa := |\tilde c''|$ und $\hat\kappa := |\hat c''|$ sowie die Normalenvektoren $\tilde\nu := \tilde c''/|\tilde c''|$ und $\hat\nu := \hat c''/|\hat c''|$?

Aufgabe 12 – Flächeninhalt (Reif 08):

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, regulär parametrisierte Kurve. Gemäß dem Greenschen Integralsatz in der Ebene gilt für den (orientierten) Flächeninhalt des von der Spur von c berandeten Gebiets

$$A(c) = \int_a^b \langle c(t), Pc'(t)\rangle\, dt, \quad P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Der Flächeninhalt ist eine Eigenschaft von $\langle c\rangle$, d.h., $A(c) = A(c \circ \varphi)$ für $\varphi' > 0$.

b) Der Flächeninhalt ist translationsinvariant, d.h., $A(c) = A(c+p)$ für konstante Vektoren $p \in \mathbb{R}^2$.
c) Der Flächeninhalt ist rotationsinvariant, d.h., $A(c) = A(Rc)$ für Rotationsmatrizen $R \in SO(2)$.

Aufgabe 13 – Durch ihre Krümmung gegebene Kurven, Klothoide (GB 02, Bergner 04):

Bestimmen Sie die nach Bogenlänge parametrisierten Kurven $c(t)$, deren Krümmungsfunktion $\kappa(t)$ wie folgt vorgegeben ist:

$$\text{a)} \quad \kappa(t) = \frac{1}{t+1}, \quad t \in [0,\infty) \qquad \text{b)} \quad \kappa(t) = at, \quad t \in [0,\infty)$$

Nehmen Sie dazu die beiden Bedingungen $c(0) = (0,0)$ sowie $c'(0) = (1,0)$ an. Das Ergebnis von b), die *Klothoide*, ist für $a \neq 0$ nicht elementar integrierbar. Skizzieren Sie die Kurven.

Aufgabe 14 – Evoluten (Bergner 04):

Es sei $c(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve, die der Einfachheit halber nach Bogenlängen parametrisiert sei. Ferner sei $\nu(t)$ die Normale und die Krümmung erfülle $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte

$$\gamma(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\nu(t)$$

nennt man *Evolute*.

a) Zeigen Sie, dass die Normalengerade $\{c(t) + s\nu(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ an $c(t)$ übereinstimmt mit der Tangentengerade an γ im Punkt $\gamma(t)$.
b) Es sei $\kappa'(t) < 0$ für $t \in [a,b]$. Zeigen Sie

$$L(\gamma) = \frac{1}{\kappa(b)} - \frac{1}{\kappa(a)}$$

für die Länge der Kurve γ.
c) Für welche $t \in [a,b]$ ist $\gamma(t)$ regulär?
d) Die Kurve

$$c(t) := (t + \sin t, -\cos t) \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

nennt man *Zykloide*. Skizzieren Sie c und berechnen Sie ihre Evolute. Zeigen Sie, dass die Evolute der Zykloide wieder die Zykloide selbst ist (bis auf eine Translation).

Aufgabe 15 – Krümmungskreise (Bergner 04):

Gegeben sei eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t) = (x(t), y(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. In einem Punkt $t_0 \in (a,b)$ sollen die Bedingungen

$$c(t_0) = (r,0) \quad , \quad c'(t_0) = (0,1) \quad \text{sowie} \quad \kappa(t_0) > \frac{1}{r}$$

für ein $r > 0$ gelten. Weiterhin sei B_r die abgeschlossene Kreisscheibe $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

a) Skizzieren Sie die Kreisscheibe B_r sowie eine mögliche Lage der Kurve c.

b) Zeigen Sie, dass sich die Kurve c lokal um $c(t_0)$ innerhalb der Kreisscheibe B_r befindet.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion $f(t) := x(t)^2 + y(t)^2$ in t_0 ein striktes lokales Maximum annimmt.

Aufgabe 16 – Parallelkurven (GB 02):

a) Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie, dass die Parallelkurve c_d die folgende Krümmung besitzt:

$$\kappa_d(t) = \frac{\kappa(t)}{1 - d\kappa(t)}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis mit Krümmungskreisen!

b) Geben Sie eine reguläre Kurve c an, so dass für kein $d \neq 0$ die Parallelkurve c_d regulär ist.

Aufgabe 17 – Konvexität einfach geschlossener Kurven mit positiver Krümmung (Bergner 04):

Gegeben sei eine geschlossene Kurve $c(t) = \big(x(t), y(t)\big) \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, die nach Bogenlänge parametrisiert sei. Ihr Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mit $c'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ erfülle $\vartheta(b) - \vartheta(a) \leq 2\pi$ und ihre Krümmung $\kappa(t) \geq 0$. Weiterhin gelte

$$c(a) = c(b) = (0, 0) \quad \text{sowie} \quad c'(a) = c'(b) = (1, 0)\ .$$

Zeigen Sie, dass $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, d.h. die Kurve c liegt oberhalb der x-Achse.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y(t)$ in a ein globales Minimum annehmen muss.
Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Kurve auf dem Intervall $[a, b)$ injektiv ist.

Aufgabe 18 – Konvexität (Reif 08):

Sei $c \colon I \to \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Jordankurve und G das von $c(I)$ berandete beschränkte Gebiet. Zeigen Sie: G ist genau dann konvex, wenn $\kappa \geq 0$.

5.3. **Raumkurven und Frenettheorie.**

Aufgabe 19 – Helix (15.5.06):

Es sei $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Helix $c(t) := \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$, wobei $r > 0$ und $h \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie Krümmung $\kappa(t)$ und Normale $\nu(t)$ der Helix.

b) Ergänzen Sie $e_1(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$ und $e_2(t) = \nu(t)$ durch $e_3(t) = b(t)$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis und berechnen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Aufgabe 20 – Krümmung und Normale (Reif 08):

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine regulär parametrisierte Kurve mit nichtverschwindender Krümmung gilt

$$\kappa\nu = \frac{c''\langle c', c'\rangle - c'\langle c'', c'\rangle}{|c'|^4}.$$

a) Berechnen Sie die Krümmung κ und (sofern definiert) den Normalenvektor ν für die Kurve $c(t) = (t^3/3, 1, t)$.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\uparrow 0} \nu(t)$ und $\lim_{t\downarrow 0} \nu(t)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 21 – Frenet-Dreibein (Reif 08):

a) Gegeben sei eine regulär parametrisierte Kurve $c\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit begleitendem Dreibein (v, n, b) sowie die Kurve

$$\tilde{c}(t) := c(0) + tv(0) + \beta(t)n(0) + \gamma(t)b(0).$$

Geben Sie möglichst einfache reelle Funktionen β, γ an, sodass begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion an der

$$v(0) = \tilde{v}(0), \quad n(0) = \tilde{n}(0), \quad b(0) = \tilde{b}(0), \quad \kappa(0) = \tilde{\kappa}(0), \quad \tau(0) = \tilde{\tau}(0).$$

b) Durch eine Bewegung der Kurve $\tilde{c}$ kann man erreichen, dass $c(0)$ in den Ursprung und $v(0), n(0), b(0)$ in die Einheitsvektoren des Koordinatensystems überführt werden. Geben Sie die Parametrisierung der transformierten Kurve an.

Aufgabe 22 – Torsion (Reif 08):

Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve. Zeigen Sie:

a) Die Torsion τ ist eine Eigenschaft von $[c]$.

b) $c(I)$ ist genau dann Teilmenge einer Ebene, wenn $\tau = 0$.
Tipp: Was ist $\langle b, c\rangle'$?

c) $c(I)$ ist genau dann Teilmenge einer Geraden, wenn $\kappa = 0$.

Aufgabe 23 – Sekanten und Krümmung (Reif 08):

Sei $c : I \to \mathbb{R}^d$ eine glatte, regulär parametrisierte Kurve. Bezeichne L_h die Länge des Kurvenstücks, das $c(t_0)$ und $c(t_0 + h)$ verbindet, und $d_h := |c(t_0 + h) - c(t_0)|$ den Abstand zwischen den beiden Punkten. Zeigen Sie:

$$\lim_{h\to 0} \frac{L_h - d_h}{d_h^3} = \frac{\kappa(t_0)^2}{24}$$

Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Überlegen Sie sich, dass man o.B.d.A. annehmen kann, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist.

b) Verifizieren Sie für eine BL-Kurve durch Ableiten von $\langle c', c'' \rangle = 0$ die Gleichung $\langle c', c''' \rangle = -\kappa^2$.
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von c im Punkt t_0 bis zu den kubischen Termen an.
d) Geben Sie die Taylorentwicklung von d_h bis zu den kubischen Termen an.
e) Berechnen Sie den obigen Grenzwert.

Aufgabe 24 – Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist (GB 02):

Wir betrachten eine Helix $c(t) := \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$ mit $0 < |h| \leq r$.

a) Zeigen Sie: Es existieren $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, so dass $c'(t_1)$ und $c'(t_2)$ senkrecht aufeinander stehen.
b) Für t_1, t_2 wie in (a) betrachten wir die Normalenebenen $E_1 := \{c(t_1) + v \mid v \perp c'(t_1)\}$ und $E_2 := \{c(t_2) + v \mid v \perp c'(t_2)\}$. Spiegeln Sie das Kurvenstück $c|_{[t_1,t_2]}$ an den Normalenebenen, um eine geschlossene C^2-Kurve in $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren, die konstante Krümmung hat, aber kein Kreis ist.

Aufgabe 25 – Frenet-Gleichungen (15.5.06):

Beweisen Sie die Frenetschen Differentialgleichungen (8).

5.4. **Bézierkurven.**

Aufgabe 26 – Bernstein-Polynome (Reif 06):

Man nennt $t_k^n := \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, die *Greville-Abszissen* der Bernstein-Polynome vom Grad n.

a) Zeigen Sie: Das Bernstein-Polynom b_k^n nimmt an der Stelle t_k^n sein Maximum an.
b) Verifizieren Sie die Gleichung
$$t = \sum_k b_k^n(t) t_k^n.$$
c) Wie kann man mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil b) den Graphen eines reellwertigen Polynoms $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ von Grad $\leq n$ als ebene Bézierkurve darstellen?

Aufgabe 27 – Lagrange-Basis (Reif 06):

Die *Lagrange-Polynome* $\ell_0^n, \ldots, \ell_n^n$ vom Grad n werden eindeutig durch die Festlegung ihrer Werte an den $n+1$ Stützstellen $t_k^n = \frac{k}{n}$ festgelegt:
$$\ell_k^n(t_k^n) = 1 \quad \text{und} \quad \ell_j^n(t_k^n) = 0 \text{ für } j \neq k, \quad (j, k = 0, \ldots, n).$$
Für gegebene Punkte $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ definiert nun
$$c(t) = \sum_{k=0}^n \ell_k^n(t) p_k$$
eine polynomiale Kurve in $\mathbb{R}^d$. Welche der Eigenschaften Randinterpolation, konvexe Hülle, Symmetrie, affine Invarianz und Variationsminderung sind für diesen Ansatz in gleicher Weise wie bei Bézierkurven gültig?

Aufgabe 28 – Eigenschaften an Randpunkten (Reif 06):

Gegeben sei eine Bézierkurve $c(t) = \sum_k b_k^n(t) p_k$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie eine Formel für $\frac{d^\ell}{dt^\ell} b_k^n(0)$ an.

b) Geben Sie eine Formel für die Krümmung κ im Kurvenpunkt $c(0)$ an und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. Zur Vereinfachung können Sie spezielle Koordinaten für p_0 und p_1 annehmen.

c) Können Sie auch im degenerierten Fall $p_0 = \cdots = p_j \neq p_{j+1}$ angeben, welche Richtung tangential an die Endpunke der Kurve ist? (Schwer, man muss umparametrisieren!)

Teil 2. Die äußere Geometrie von Hyperflächen

`6. Vorlesung, Montag 12.6.06`

Wir wenden uns der Geometrie von Flächen zu. Wie bei Kurven studieren wir die sogenannte *lokale Geometrie*; es geht dabei um den Krümmungsbegriff. Wir benötigen dafür die Analysis mehrerer Veränderlicher; lineare Algebra wird ebenfalls eine entscheidende Rolle spielen.

Genauer wollen wir mit Hilfe der Normalenabbildung untersuchen, wie eine Fläche im umgebenden Raum liegt. In diesem Sinne betrachten wir die *äußere Geometrie* von Flächen. Die Ableitung der Normalenabbildung liefert dann die verschiedenen Krümmungsbegriffe für Flächen: Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.

1. Parametrisierte Flächen

1.1. **Bezeichnungen.** Wir verwenden den Buchstaben U für Gebiete des $\mathbb{R}^n$, d.h. für offene (weg-)zusammenhängende Teilmengen.

Ist $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so bezeichnen wir mit df_p das Differential. Es ist immer am einfachsten, sich darunter die Jacobimatrix von f vorzustellen. Diese Matrix hängt vom sogenannten *Fußpunkt* p ab, den wir der Übersichtlichkeit halber in vielen Fällen einfach weglassen.

Eine *Richtungsableitung* in Richtung eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$ notieren wir als

$$\partial_X f(p) := \frac{d}{dt} f(p + tX)\Big|_{t=0}.$$

Üblicherweise berechnet man eine Richtungsableitung, indem man die Jacobimatrix df auf den Vektor X anwendet, d.h. $\partial_X f(p) = df_p(X)$. Wir schreiben auch $df\,X$ statt $df(X)$, weil wir $df(X)$ als Matrixprodukt auffassen.

Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots)$ schreiben wir als $e_1, \ldots, e_n$. Benutzen wir andere Koordinaten, wie etwa (t, φ), so schreiben wir auch e_t, e_φ. Eine partielle Ableitung ist natürlich eine spezielle Richtungsableitung (in Richtung des i-ten Basisvektors e_i):

$$\partial_i f(p) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df_p(e_i) = \partial_{e_i} f(p)$$

Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ heißt *Immersion*, wenn für jedes $p \in U$ das Differential $df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ den Rang n hat. (Warum gilt dann $n \leq m$?)

1.2. **Flächenstücke.** Wie bei Kurven wollen wir Selbstschnitte zulassen, und parametrisierungsunabhängige Eigenschaften von $f(U)$ studieren. Wir definieren daher ganz analog:

Definition. (i) Ein *parametrisiertes Flächenstück* ist eine glatte Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$.
(ii) Zwei parametrisierte Flächenstücke $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde f\colon \tilde U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißen äquivalent, wenn $\tilde f = f \circ \varphi$ für einen Diffeomorphismus φ ist (φ ist also invertierbar und φ wie φ^{-1} sind glatt). Ein *Flächenstück* ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächenstücke.

Die Glattheit ist kaum je nötig, meist reicht zweimal stetig differenzierbar. Wenn die Immersion eine *Einbettung* ist, also ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ sogar Untermannigfaltigkeit.

Jedem $p \in U$ und $X \in \mathbb{R}^n$ können wir auf der Fläche den *Tangentialvektor* $df_p(X)$ zuordnen. Die Menge der Tangentialvektoren bildet den *Tangentialraum* in p,

$$T_p f := \{df_p(X) \mid X \in \mathbb{R}^n\},$$

einen n-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Es dient der Unterscheidung von verschiedenen Tangentialräumen in Doppelpunkten, dass wir als Index einen Punkt p aus dem Parametergebiet U nehmen. Den Vektor X stellen wir uns als tangential an die Parametermenge U mit *Fußpunkt* p vor. Wir werden oft X, Y schreiben, ohne explizit zu sagen, dass dies Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

Die Immersionseigenschaft bedeutet:

Lemma 1. *Für jedes $p \in U$ ist $df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_p f$ ein Vektorraumisomorphismus.*

Wie sieht derselbe Tangentialvektor in zwei verschiedenen Parametrisierungen aus?

$$(1) \quad \tilde f = f \circ \varphi, \;\; p = \varphi(\tilde p), \;\; X = d\varphi_{\tilde p}(\tilde X) \quad \Rightarrow \quad df_p(X) = df_{\varphi(\tilde p)}\big(d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)\big) \overset{\text{Kettenr.}}{=} d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X)$$

Tangentialvektoren transformieren sich also mit dem Differential der Parametertransformation, bzw. mit deren Jacobimatrix.

Einen Tangentialvektor $df_p(X)$ an eine Fläche kann man stets als den Tangentialvektor einer Kurve in der Fläche schreiben: Dazu wählt man $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\gamma(t) := p + tX$, und $c := f \circ \gamma$. Dann gilt

$$c'(0) = df_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = df_p(X).$$

1.3. **Erste Fundamentalform.** Die längentreue Parametrisierung nach der Bogenlänge ist für Kurven nützlich. Wie aus der Kartographie bekannt, hat aber nicht jede Fläche eine längentreue Parametrisierung; Gauß hat mit dem *theorema egregium* eine äquivalente Bedingung gefunden, die durch Krümmungen formuliert ist. Es bleibt daher nichts übrig, als mit verzerrenden Parametrisierungen zu arbeiten. Wir sehen das Maß der Verzerrung als eine Eigenschaft des Parameterbereiches an:

Definition. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrisiertes Flächenstück, und $p \in U$. Die *erste Fundamentalform* ist die Abbildung

$$g\colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad g_p(X,Y) := \big\langle df_p(X), df_p(Y)\big\rangle.$$

Wir bezeichnen $\|X\|_p := |df_p(X)| = \sqrt{g_p(X,X)}$ als *(Riemannsche) Länge* von X.

Beispiel. Die Länge einer Kurve $c := f \circ \gamma$ ist

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\,dt = \int_a^b |df_{\gamma(t)}\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|_{\gamma(t)}\,dt.$$

Man darf also im Parameterbereich integrieren, sofern man die Längenverzerrung der Fläche durch $\|.\|$ berücksichtigt.

Die erste Fundamentalform ist bilinear und symmetrisch in (X,Y). Sie ist positiv definit, $g_p(X,X) = \big|df_p(X)\big|^2 > 0$ für $X \neq 0$, da f Immersion ist. Die erste Fundamentalform ist daher ein Skalarprodukt, das auf glatte Weise vom Fußpunkt p abhängt.

Weil g nur von den Verhältnissen im Bild bestimmt wird, transformiert sich g für $\tilde f = f \circ \varphi$ wie folgt. Mit den Bezeichnungen von (1) gilt:

$$\tilde g_{\tilde p}(\tilde X, \tilde Y) := \big\langle d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X), d\tilde f_{\tilde p}(\tilde Y)\big\rangle = \big\langle df_p(\underbrace{d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)}_{X}),\, df_p(\underbrace{d\varphi_{\tilde p}(\tilde Y)}_{Y})\big\rangle = g_p\big(X,Y\big).$$

Wir wollen die erste Fundamentalform auch in Matrixform bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $U \subset \mathbb{R}^n$ schreiben. Wir setzen dazu

$$g_{ij}(= g_{ji}) := g_p(e_i, e_j) = \Big\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\rangle, \qquad 1 \le i,j \le n;$$

Es seien nun zwei *Vektorfelder* $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Schreiben wir

$$X(p) = \big(X^1(p), \ldots, X^n(p)\big) = \sum_{i=1}^n X^i(p) e_i$$

und entsprechend für $Y(p)$, so erhalten wir

$$g(X,Y) = g\big(\textstyle\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big) \overset{g \text{ bilinear}}{=} \displaystyle\sum_{i,j=1}^n X^i Y^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j.$$

So wie hier lassen wir oft die Abhängigkeit vom Fußpunkt $p \in U$ fort. Wir schreiben Vektorkomponenten oben wie unten; meist wird über Paare von oberen und unteren Indices summiert.

Beispiele. 1. Das *Helikoid* oder die *Wendelfläche* ist die parametrisierte Fläche

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x\sin y, -x\cos y, y). \tag{2}$$

Für jedes feste x sind die Parmeterlinien $y \mapsto f(x,y)$ Helices vom Radius x mit Ganghöhe 2π. Für jedes feste y sind die Parameterlinien $x \mapsto f(x,y)$ Geraden. Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Die Funktion g_{22} gibt die quadrierte Länge des Tangentialvektors der Helices an, die in $|x|$ wächst. Weil die Geraden nach Bogenlänge parametrisiert ist g_{11} konstant und $g_{12} = g_{21}$ zeigt, dass die Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen.

2. Zu einer (Höhen-)Funktion $u\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten wir den Graphen $f(x) := \big(x, u(x)\big)$ mit

$$g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \big\langle (e_i, \partial_i u),\, (e_j, \partial_j u) \big\rangle = \delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u.$$

Daher hat X die quadrierte Länge

$$\|X\|^2 = |df(X)|^2 = \sum_{i,j} X^i(\delta_{ij} + \partial_i u \partial_j u) X^j = |X|^2 + \langle \operatorname{grad} u, X \rangle^2.$$

In der Tat: Senkrecht zu $\operatorname{grad} u$ ist u in erster Ordnung konstant, so dass senkrechte Vektoren im Graphen die gleiche Länge haben; die zu $\operatorname{grad} u$ parallelen Vektoren werden am meisten im Graphen verlängert.

Bemerkung. Das Standard-Skalarprodukt auf U spielt für uns keine Rolle. Wenn wir Begriffe wie "senkrecht" oder "Orthonormalbasis" für U bzw. für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verwenden, so meinen wir dies bezüglich g. Insbesondere betrachten wir $e_1, \dots, e_n$ nicht als Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes, sondern nur als die uns durch die konkrete Realisierung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Parametergebiets gelieferte Basis. Benötigen wir eine g_p-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$, so können wir sie durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bestimmen.

`7. Vorlesung, Montag 19.6.06` ____

2. Die Normalen-Abbildung von Hyperflächen und ihre Ableitungen

Wir spezialisieren von nun an auf den Fall von Kodimension 1, also $m = n + 1$. Flächen $f\colon U^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißen auch *Hyperflächen.*

2.1. **Gauß-Abbildung.** Wir betrachten den *Normalraum*

$$N_p f := (T_p f)^\perp, \qquad p \in U.$$

Für Hyperflächen ist $N_p f$ eindimensional und wird durch Einheitsvektoren aufgespannt:

Definition. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ parametrisiertes Hyperflächenstück, so heißt eine stetige Abbildung $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ mit

$$\big\langle \nu(p), df_p(X) \big\rangle = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n \text{ und } p \in U$$

eine *Gauß-Abbildung* oder Normalen-Abbildung.

Im Falle $n = 2$ kann man auch mit dem Vektorprodukt definieren

$$\nu(p) := \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \frac{\partial f}{\partial y}(p)}{\big|\frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \frac{\partial f}{\partial y}(p)\big|},$$

dabei ist $v \times w = \big(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_2\big)$. Man sieht der Formel sofort an, dass ν glatt ist. Entsprechend kann man auch in höherer Dimension die Gauß-Abbildung definieren, aber wir verzichten hier auf die Details.

Beispiel. Für einen Graphen $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ lautet die obere Normale

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\big(-\nabla u, 1\big), \tag{4}$$

denn ν hat Länge 1 und steht senkrecht auf $\partial_i f = (e_i, \partial_i u)$ für alle i.

Bemerkung. Man kann die Wahl der Normale festhalten, indem man vom parametrisierten Flächenstück (f, ν) spricht. Eine bestimmte Normale kann man dadurch auswählen, dass man verlangt: $\big(df(e_1), \dots, df(e_n), \nu\big)$ sind positiv orientiert. Eine solche Normale nenne ich die *orientierte Normale*.

2.2. **Kurven in Flächen: Normal- und geodätische Krümmung.** Wir wollen nun die Krümmung von Kurven in Hyperflächen untersuchen. Dazu sei $\gamma\colon (a,b) \to U$ eine Kurve, und $c := f \circ \gamma$. Wir nehmen an, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. γ hat die Riemannsche Länge $\|\gamma'\| \equiv 1$. Um festzustellen, wie sich die Raumkurve c innerhalb der Fläche (f, ν) krümmt, zerlegen wir den Krümmungsvektor c'' orthogonal in einen Anteil tangential und einen Anteil normal zum Tangentialraum:

$$c'' = c''^\top + c''^\perp = c''^\top + \langle c'', \nu \circ \gamma \rangle (\nu \circ \gamma) \qquad \in T_\gamma f \oplus N_\gamma f. \tag{5}$$

Die Beträge der Vektoren auf der rechten Seite sind die entscheidenden Ausdrücke der Flächentheorie: Die *geodätische Krümmung* $|c''^\top|$ ist der Kernausdrück für die innere Geometrie, während wir für die äußere Geometrie die *Normalkrümmung* $\langle c'', \nu \circ \gamma \rangle$ untersuchen.

Wir werden sehen, dass die Normalkrümmung allein aus der Krümmung der Fläche entsteht, während die geodätische Krümmung angibt, wie sehr sich die Kurve in der Fläche krümmt.

Beispiele. 1. Jede Kurve in der Ebene hat nur geodätische Krümmung.
2. Der Berührkreise eines Rotationstorus mit einer Ebene hat nur geodätische Krümmung.
3. Ein Großkreis in der Sphäre ist eine Kurve, die nur Normalkrümmung besitzt; für alle anderen Kreise in der Sphäre gilt das nicht.

Wir können für die Normalkrümmung schreiben:

$$\kappa_{\text{norm}} := \langle c'', \nu \circ \gamma \rangle \overset{\langle c', \nu \rangle = 0}{=} -\big\langle c', d\nu_\gamma(\gamma') \big\rangle = -\big\langle df_\gamma(\gamma'), d\nu_\gamma(\gamma') \big\rangle \tag{6}$$

Dies führt uns auf die genauere Untersuchung des Differentials $d\nu$ der Gauß-Abbildung.

2.3. **Weingarten-Abbildung.** Wenn wir in U längs einer Kurve $\gamma(t)$ laufen, wie ändert sich dann die Flächennormale $\nu \circ \gamma$? Auf jeden Fall ist $d\nu_\gamma(\gamma')$ tangential:

Lemma 2. *Für jedes $p \in U$ bildet die Abbildung $d\nu_p$ den Raum $\mathbb{R}^n$ auf $T_p f$ ab.*

Beweis. Wir berechnen $d\nu_p(X)$, indem wir ν auf eine Kurve γ in U einschränken, die $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$ erfüllt. Wegen

$$0 = \langle \nu \circ \gamma, \nu \circ \gamma \rangle' = 2\langle d\nu_\gamma(\gamma'), \nu \circ \gamma \rangle$$

folgt für $t = 0$ dann $0 = \langle d\nu_p(X), \nu(p) \rangle$, d.h. $d\nu_p(X) \perp \nu(p)$. □

Wir wollen den Effekt von $d\nu$ auf dem parametrisierenden Gebiet U messen. Nach Lemma 1 gibt es für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ genau ein $Y \in \mathbb{R}^n$, das die Gleichung $d\nu_p(X) = df_p(Y)$ erfüllt. Geometrisch bedeutet diese Gleichung, dass, wenn man in Richtung X im Parametergebiet geht, die Gauß-Abbildung von f sich in Richtung $df(Y)$ ändert. Die Abbildung $X \mapsto Y$ wird für unsere Krümmungsdefinition entscheidend werden, und wir geben ihr einen Namen:

Definition. Die *Weingartenabbildung* (engl. *shape operator*) von (f, ν) ist die Abbildung

$$S \colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{mit} \qquad df_p(S_p X) = -d\nu_p(X),$$

die nach Lemma 1 and 2 eindeutig bestimmt ist.

Das gewählte Vorzeichen hat historische Gründe, vergleiche dazu (12) weiter unten.

Die Weingartenabbildung hat die folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $S_p X = -(df_p)^{-1} d\nu_p(X)$. Dabei ist $d\nu$ der wesentliche Teil. Das Differential df sehen wir nur an als nötige Übersetzungsvorschrift vom Parametergebiet ins Bild.

2. $X \mapsto S_p X$ ist linear für jedes $p \in U$, d.h. S_p ist Endomorphismus.

3. S ändert sein Vorzeichen mit ν.

4. Unter einer Parametertransformation $\tilde{f} := f \circ \varphi$ mit $\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$ bleibt die Weingartenabbildung ähnlich:

$$\tilde{S}_{\tilde{p}} := -(d\tilde{f}_{\tilde{p}})^{-1} \cdot d\tilde{\nu}_{\tilde{p}} = -(d\varphi_{\tilde{p}})^{-1} \cdot (df_p)^{-1} \cdot d\nu_p \cdot d\varphi_{\tilde{p}} = (d\varphi_{\tilde{p}})^{-1} \cdot S_p \cdot d\varphi_{\tilde{p}}; \tag{7}$$

Dabei sei $p = \varphi(\tilde{p})$, etc.

Beispiele. 1. Für eine Ebene $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$ ist $\nu \equiv (0,0,1)$ Normale. Also gilt $d\nu = 0$ und die Weingartenabbildung bildet $\mathbb{R}^2$ auf 0 ab, $S \equiv 0$.

2. Für den Einheits*zylinder*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (\cos x, \sin x, y) \tag{8}$$

wählen wir die innere Normale, $\nu(x,y) = \big(-\cos x, -\sin x, 0\big)$. Also hat man $d\nu(e_1) = (\sin x, -\cos x, 0) = -df(e_1)$ und $d\nu(e_2) = 0$, d.h. die Normale kippt, $Se_1 = e_1$, oder bleibt unverändert, $Se_2 = 0$.

3. Auf dem *hyperbolischen Paraboloid*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x,y,xy) \tag{9}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,0,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (0,1,x), \qquad \nu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y,-x,1).$$

Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt (warum?). Es gilt

$$df\left(S_{(0,0)}e_1\right) = -d\nu_{(0,0)}(e_1) = -\frac{\partial \nu}{\partial x}(0,0) = (0,1,0) = df_{(0,0)}(e_2),$$

d.h. entlang der e_1-Richtung führt die Normale eine Drehung aus, $S_{(0,0)}e_1 = e_2$. Ebenso gilt $S_{(0,0)}e_2 = e_1$.

2.4. **Zweite Fundamentalform.** Um die Weingartenabbildung näher zu untersuchen, ist es nützlich, eine Bilinearform zu definieren, mit der man leichter rechnen kann:

Definition. Die *zweite Fundamentalform* ist die fußpunktabhängige Bilinearform

$$b_p(X,Y) := \big\langle \nu(p), d^2 f_p(X,Y) \big\rangle, \qquad X, Y \in \mathbb{R}^n, \;\; p \in U. \tag{10}$$

Darin ist $d^2 f(X,Y)$ die *Hesse-Form*, also die zweite Richtungsableitung $\partial_X \partial_Y f$ oder

$$d^2 f(X,Y) = d^2 f\Big(\textstyle\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\Big) = \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{11}$$

Nach dem Schwarzschen Lemma vertauschen zweite partielle Ableitungen. Die Hesse-Form $d^2 f(X,Y)$ ist daher symmetrisch in X, Y und b ist deshalb symmetrische Bilinearform. Aus dieser Eigenschaft folgern wir eine Eigenschaft der Weingartenabbildung, die entscheidend für unsere Krümmungsdefinition werden wird:

Satz 3. *Die Weingartenabbildung S ist selbstadjungiert bezüglich g,*

$$g(SX,Y) = g(X,SY) \qquad \text{für alle } X,Y \in \mathbb{R}^n, \;\; p \in U.$$

Beweis. Die Richtungsableitung $\partial_X = \sum_i X^i \partial_i$ von $0 = \langle \nu, df(Y)\rangle$ ist

$$0 = \partial_X \big\langle \nu, df(Y) \big\rangle = \big\langle d\nu(X), df(Y) \big\rangle + \big\langle \nu, df^2(X,Y) \big\rangle.$$

Dadurch erhalten wir eine Beziehung zwischen zweiter Fundamentalform und Weingartenoperator:

$$b(X,Y) = \big\langle \nu, d^2f(X,Y) \big\rangle = -\big\langle d\nu(X), df(Y) \big\rangle = g(SX,Y) \qquad \text{für alle } X,Y \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Wie bereits erwähnt ist die linke Seite symmetrisch, daher auch die rechte. □

Aus (12) erklärt sich das Vorzeichen bei der Definition von b und S.

2.5. **Satz von Meusnier und Matrixdarstellungen von S, b.** Wir geben noch weitere Resultate über Normalkrümmung, Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform an.

Satz 4 (Meusnier)**.** *Es sei ein Hyperflächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit Gauß-Abbildung ν gegeben. Die Normalkrümmung* (6) *jeder nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c ist bereits durch die Tangentenrichtung γ' und die Daten g, S der Fläche f bestimmt:*

$$\kappa_{norm}(\gamma') = b(\gamma', \gamma') = g(\gamma', S\gamma') \tag{13}$$

Beweis. Dies folgt aus

$$\kappa_{\mathrm{norm}} = \big\langle (f \circ \gamma)'', \nu \circ \gamma \big\rangle = \big\langle d^2 f(\gamma', \gamma'), \nu \circ \gamma \big\rangle = b(\gamma', \gamma')$$ □

Die Normalkrümmung $\kappa_{\mathrm{norm}}(X)$ in Richtung X ist also eine quadratische Form $b(X,X)$, deren Bilinearisierung die zweite Fundamentalform darstellt.

Beispiel. Wir betrachten Kurven im Zylinder (8) mit $Se_1 = e_1$ und $Se_2 = 0$. Weil e_1, e_2 bereits g-Orthonormalbasis ist, kann man einen Einheitsvektor γ' darstellen als $\gamma'(t) = \cos\alpha(t)\, e_1 + \sin\alpha(t)\, e_2$. Es gilt

$$\kappa_{\mathrm{norm}}(\gamma') = g(\gamma', S\gamma') = g\big(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2,\ S(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2)\big) \overset{Se_1=e_1,\, Se_2=0}{=} \cos^2\alpha,$$

d.h. $0 \le \kappa_{\mathrm{norm}} \le 1$.

Wir kommen nun zu Matrixdarstellungen. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$. hat die zweite Fundamentalform die symmetrische Matrix

$$b_{ij} := b(e_i, e_j) = -\Big\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big\rangle = \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big\rangle. \tag{14}$$

Schreiben wir die Matrix-Darstellung von S als $S(e_j) = \sum_{i=1}^n S^i_j e_i$ und wenden wir (10) auf $X := e_i$ und $Y := e_j$ an, so erhalten wir

$$b_{ij} = g\big(e_i, S(e_j)\big) = g\big(e_i, \textstyle\sum_\ell S^\ell_j e_\ell\big) = \displaystyle\sum_l g(e_i, e_\ell) S^\ell_j = \sum_l g_{i\ell} S^\ell_j,$$

d.h. wir haben eine Matrizengleichung der Form $b = gS$ oder $g^{-1}b = S$. Wenn wir also mit (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix notieren, so lautet die letzte Gleichung

$$S^i_j = \sum_k g^{ik} b_{kj}. \tag{15}$$

Bemerkungen. 1. Im klassischen zweidimensionalen Fall wird für erste und zweite Fundamentalform oft die Notation von Gauß benutzt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

2. Das Produkt symmetrischer Matrizen ist nicht unbedingt symmetrisch. Daher ist S^i_j im allgemeinen nicht symmetrisch.

Beispiel. Ein Graph $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ mit $\partial_i f = \big(e_i, \partial_i u)$ hat die zweite Fundamentalform

$$b_{ij} = \langle \nu, \partial_{ij} f\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{ij} u \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial_{ij} u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{16}$$

Speziell für Punkte p mit horizontaler Tangentialebene gilt $\nabla u(p) = 0$, so dass $b_p(X,Y) = d^2 u_p(X,Y)$ bzw. $b_{ij}(p) = \partial_{ij} u(p)$. Wegen $(g_{ij})_p = \delta_{ij}$ ist die Matrix von S in solchen Punkten dann ebenfalls durch $\partial_{ij} u$ gegeben.

`8. Vorlesung, Montag 26.6.06` ———

3. Krümmungsbegriffe für Hyperflächen

3.1. **Hauptkrümmungen.** Auf dem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, g_p)$ ist nach Satz 3 der Endomorphismus S_p selbstadjungiert. Es gilt daher das folgende Resultat der linearen Algebra:

Satz 5. *Sei (f,ν) durch U parametrisiertes Hyperflächenstück in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann existiert für jedes $p \in U$ eine g-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren für S_p mit Eigenwerten $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Die Eigenwerte sind unabhängig von der gewählten Parametrisierung.*

Allein die letzte Aussage bleibt zu zeigen. Laut (7) sind zwei Darstellungen S und $\tilde{S} = d\varphi^{-1} S\, d\varphi$ ähnlich. Aus der Eigenwertgleichung $Sv = \lambda v$ folgt also die Eigenwertgleichung $\tilde{S}(d\varphi^{-1} v) = d\varphi^{-1} S v = \lambda(d\varphi^{-1} v)$.

Definition. Ein Eigenvektor $v(p) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von S_p heißt *Hauptkrümmungsrichtung* in p, der zugehörige Eigenwert $\kappa(p)$ eine *Hauptkrümmung*.

Für jeden Fußpunkt $p \in U$ haben wir damit einen Krümmungsbegriff, den ein Standardproblem der linearen Algebra liefert. In der Sprechweise der linearen Algebra gewinnen wir die Hauptkrümmungsrichtungen $v_1, \dots, v_n$ aus der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ durch Hauptachsentransformation der Bilinearform $b_p(X, Y)$.

Längs einer Hauptkrümmungsrichtung kippt die Normale mit Geschwindigkeit $-\kappa$; sie rotiert nicht.

Beispiele. 1. Auf dem Zylinder (8) mit $Se_1 = e_1$ bzw. $Se_2 = 0$ sind beide Koordinatenrichtungen Hauptkrümmungsrichtungen, und zwar zu den Hauptkrümmungen 1 bzw. 0.

2. Im Punkt $(0, 0)$ des hyperbolischen Paraboloids (9) gilt $S_{(0,0)}e_1 = e_2$ und $S_{(0,0)}e_2 = e_1$. Es folgt $S(e_1 \pm e_2) = \pm(e_1 \pm e_2)$, so dass die beiden Diagonalen $e_1 \pm e_2$ die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt $(0, 0)$ sind, und ± 1 ihre Hauptkrümmungen.

3. Die Fälle $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{S}^n_r$ sind degeneriert: Hier ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung mit Hauptkrümmung 0 bzw. $\frac{1}{r}$ (vgle. Aufgabe 15).

Bemerkung. Folgende allgemeine Tatsachen der linearen Algebra formulieren wir für unsere spezielle Situation:

1. *Zwei Hauptkrümmungsrichtungen X_1, X_2 zu verschiedenen Hauptkrümmungen $\kappa_1 \neq \kappa_2$ stehen aufeinander senkrecht bezüglich g.* In der Tat folgt aus

$$\kappa_1 g(X_1, X_2) = g(SX_1, X_2) = g(X_1, SX_2) = \kappa_2 g(X_1, X_2),$$

dass $g(X_1, X_2) = 0$.

2. Es sei ein Punkt $p \in U$ fixiert. Wir betrachten die kritischen Punkte der Normalkrümmung $X \mapsto g_p(SX, X) =: f(X)$, unter der Nebenbedingung, dass X in der g-Einheitssphäre $\{X \in \mathbb{R}^n \mid h(X) := \|X\|_p^2 = 1\}$ liegt. Nach dem Satz von Lagrange ist X kritisch genau dann, wenn $\operatorname{grad} f(X) = \lambda \operatorname{grad} h(X)$. Komponentenweise gilt also $df_X(e_i) = \lambda dh_X(e_i)$ für alle i. Durch Ausrechnen folgt

$$df_X(e_i) = \frac{d}{dt} g\big(S(X + te_i), X + te_i\big)\Big|_{t=0} = g\big(SX, e_i\big) + g\big(Se_i, X\big) = g\big(2SX, e_i\big),$$

und ebenso $dh_X(e_i) = \frac{d}{dt} g(X + te_i, X + te_i)\big|_{t=0} = g(2X, e_i)$. Weil diese beiden Gleichungen für alle $i = 1, \dots, n$ gelten, folgt daraus die Eigenwertgleichung $SX = \lambda X$. Wir haben erhalten: *Die kritischen Punkte X der Normalkrümmung f auf der g-Einheitssphäre sind also genau die Hauptkrümmungsrichtungen.* Insbesondere sind minimale und maximale Normalkrümmung gerade Hauptkrümmungen. Aus Bemerkung 2 folgt:

Satz 6. *Auf Flächen ($n = 2$) wird die Normalkrümmung in einer Hauptkrümungsrichtung minimal und in einer anderen (darauf senkrechten) maximal.*

Man kann den Satz aber auch ohne die Bemerkung beweisen:

Beweis. Sind $v_1 \perp_g v_2$ zwei Einheits-Hauptkrümmungsrichtungen, dann lautet die Normalkrümmung in Richtung $v_\alpha := \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2$

$$g(Sv_\alpha, v_\alpha) = g(\kappa_1 \cos\alpha\, v_1 + \kappa_2 \sin\alpha\, v_2,\ \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2) = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \sin^2\alpha \tag{17}$$

(*Euler-Formel*). Als Funktion von α hat die Normalkrümmung also Maximum und Minimum gerade in den Richtungen $\pm v_1$ und $\pm v_2$. □

Definition. Eine reguläre Kurve $c = f \circ \gamma$ heißt
(i) *Krümmungslinie*, wenn γ' Hauptkrümmungsrichtung ist für alle t, bzw.
(ii) *Asymptotenlinie*, wenn für alle t die Normalenkrümmung verschwindet, $g(S\gamma', \gamma') = 0$.

Beispiele. 1. Eine Gerade in einer Hyperfläche ist stets Asymptotenlinie, denn $S\gamma' \perp_g \gamma'$.
2. Auf dem Zylinder sind Kreise und Geraden Krümmungslinien.
3. Auf $\mathbb{S}^n$ ist jede Kurve Krümmungslinie.
4. In $\mathbb{R}^n$ ist jede Kurve Krümmungs- und Asymptotenlinie.

3.2. Gauß- und mittlere Krümmung.

Definition. Es sei (f, ν) ein auf U parametrisiertes Hyperflächenstück. Für $p \in U$ seien $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p)$ die Hauptkrümmungen bzgl. einer Basis $v_1(p), \ldots, v_n(p)$ von Hauptkrümmungsrichtungen. Die *Gauß-Krümmung* K ist das Produkt der Hauptkrümmungen, die *mittlere Krümmung* H ihr Mittelwert,

$$K(p) := \det S_p = \kappa_1(p) \cdot \ldots \cdot \kappa_n(p), \qquad H(p) := \frac{1}{n} \operatorname{Spur} S_p = \frac{1}{n}\big(\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_n(p)\big).$$

Bemerkung. Laut Satz 5 sind die Hauptkrümmungen κ_i von der gewählten Parametrisierung unabhängig; entsprechendes gilt auch für H, K. Die Gauß-Krümmung K ist eine Größe der inneren Geometrie und besitzt daher noch weitere erstaunliche Invarianzen. Bei Wechsel der Normalen ändert H sein Vorzeichen, aber K ändert das Vorzeichen nur in ungerader Dimension; für Flächen, $n = 2$, bleibt K invariant.

Beispiele. (vgl. Abschnitt 3.1): 1. Das Zylinderstück (8) mit innerer Normaler hat konstante Hauptkrümmungen 0 und 1. Also gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.
2. Auf dem hyperbolischen Paraboloid (9) hat man $\kappa_{1,2}(0,0) = \pm 1$. Daher ist $K(0,0) = -1$, $H(0,0) = 0$.
3. Für $\mathbb{S}^n_r$ mit innerer Normaler gilt $K \equiv (\frac{1}{r})^n$, $H \equiv \frac{1}{r}$; für $\mathbb{R}^n$ ist $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Aus (15) gewinnt man lokale Darstellungen, mit denen man H, K gewöhnlich ausrechnet:

Satz 7. *Die Hauptkrümmungsrichtungen sind die Eigenvektoren der Matrix* $(g^{ik}b_{kj})_{1\le ij\le n}$. *Insbesondere haben Gauß- und mittlere Krümmung die Darstellung*

$$K = \det(g^{-1}b) = \det g^{-1}\det b = \frac{\det b}{\det g}, \qquad H = \frac{1}{n}\operatorname{Spur}(g^{-1}b) = \frac{1}{n}\sum_{1\le i,j\le n} g^{ij}b_{ij}.$$

Speziell für $n = 2$ *ist* $g^{-1} = \frac{1}{\det g}\left(\begin{smallmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11}\end{smallmatrix}\right)$ *und daher*

$$H = \frac{1}{2\det g}(g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}).$$

`9. Vorlesung, Montag 3.7.06` ______

Beispiel. Wir betrachten Punkte $p = (x, y)$ mit horizontaler Tangentialebene in einem Graphen $f(x, y) = \big(x, y, u(x, y)\big)$, d.h. $\nabla u(p) = 0$. Es gilt also $(g_{ij})_p = \delta_{ij}$ und $(b_{ij})_p = \partial_{ij}u(p)$, siehe Abschnitt 2.3. Für solche p erhalten wir daher

$$K(p) = \partial_{11}u\,\partial_{22}u - (\partial_{12}u)^2, \qquad H(p) = \frac{1}{2}\big(\partial_{11}u + \partial_{22}u\big) = \frac{1}{2}\Delta u.$$

Sind die Koordinatenrichtungen bereits Hauptkrümmungsrichtungen, so verschwindet bei K der Term $\partial_{12}u$. Für jeden Punkt einer beliebigen Fläche ist nach passender Drehung die Voraussetzung erfüllt, und man kann H, K wie angegeben effizient berechnen.

Auf Flächen nennt man Punkte p mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte*. Beispielsweise sind sämtliche Punkte von $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{R}^2$ Nabelpunkte. Um diesen Begriff ranken sich interessante offene Probleme. Eine Vermutung von Caratheodory sagt, dass jede konvexe Einbettung von $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ mindestens zwei Nabelpunkte besitzt. Eine Vermutung von Loewner sagt, dass isolierte Nabelpunkte von Flächen in $\mathbb{R}^3$ stets einen Index ≤ 1 haben; der Index isolierter Nabelpunkte gibt an, wie oft das Krümmungslinienvektorfeld um einen Nabelpunkt dreht (siehe [H], S.109). Diese Vermutungen sind bewiesen für den Fall, dass die Fläche analytisch ist, aber Beweise, die für geringere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gegeben worden sind, scheinen nicht richtig zu sein.

3.3. **Beispiel: Rotationsflächen.** Es sei $(r, h)\colon I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine reguläre Kurve. Wir legen die Bildebene in die x, z-Ebene und rotieren sie um die z-Achse. Das Ergebnis ist die *Rotationsfläche*

$$f\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \qquad f(t,\varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t)\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi \\ r'\sin\varphi \\ h'\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \partial_2 f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix},$$

ist die erste Fundamentalform g diagonal mit

$$g_{11} = r'^2 + h'^2, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Die Kurvensenkrechte $J\binom{r'}{h'} = \binom{-h'}{r'}$, normiert und um die z-Achse gedreht, ergibt die Flächennormale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} -h' \cos\varphi \\ -h' \sin\varphi \\ r' \end{pmatrix}.$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$\partial_{11} f = \begin{pmatrix} r'' \cos\varphi \\ r'' \sin\varphi \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \partial_{22} f = \begin{pmatrix} -r \cos\varphi \\ -r \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{12} f = \partial_{21} f = \begin{pmatrix} -r' \sin\varphi \\ r' \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$b_{11} = \langle \partial_{11} f, \nu \rangle = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}, \qquad b_{22} = \langle \partial_{22} f, \nu \rangle = \frac{rh'}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}, \qquad b_{12} = \langle \partial_{12} f, \nu \rangle = 0.$$

Weil sowohl g wie b diagonal sind, ist auch $g^{-1}b$ diagonal und die Koordinatenrichtungen $v_1 := e_t$, $v_2 := e_\varphi$ sind Hauptkrümmungsrichtungen, mit Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = g^{11} b_{11} = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}^{\,3}}, \qquad \kappa_2 = g^{22} b_{22} = \frac{1}{r} \frac{h'}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}. \tag{18}$$

Wir berechnen abschließend K, H der Rotationsfläche, wenn die Kurve (r, h) nach Bogenlänge parametrisiert ist. Aus $r'^2 + h'^2 = 1$ folgt $r'r'' + h'h'' = 0$ und daher

$$K = \frac{r'h'h'' - h'^2 r''}{r} = \frac{-r'^2 r'' - h'^2 r''}{r} = -\frac{r''}{r}, \qquad 2H = r'h'' - h'r'' + \frac{1}{r} h'.$$

Beispiel. Für $0 < \rho < R$ wird ein *Rotationstorus* erzeugt durch die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\big(r, h\big)(t) = \Big(R + \rho \cos\frac{t}{\rho},\ \rho \sin\frac{t}{\rho}\Big).$$

Wegen $r' = -\sin\frac{t}{\rho}$ und $r'' = -\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}$ folgt

$$K = \frac{\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}}{R + \rho \cos\frac{t}{\rho}}.$$

Es gilt $K = 0$ genau für $\frac{t}{\rho} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für alle anderen Punkte gilt: Auf der "Außenseite" des Torus ist $K > 0$, auf der "Innenseite" ist $K < 0$.

Wir wollen abschließend zeigen, wie man die Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche alternativ aus anschaulichen geometrischen Überlegungen gewinnen kann. Wir betrachten dazu die *Meridian*kurven $t \mapsto f(t, \varphi) =: m_\varphi(t)$ und die *Breitenkreise* $\varphi \mapsto f(t, \varphi) =: b_t(\varphi)$.

In jedem Schnittpunkt schneiden sich diese beiden Kurven senkrecht, so dass die drei Vektoren m'_φ, b'_t, ν eine orthogonale Basis bilden.

Jeder Meridian liegt in einer vertikalen Ebene $E_\varphi := \operatorname{span}\{\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2,\, e_3\}$. Eine Spiegelung an E_φ erhält die Rotationsfläche und ihre Flächennormalen $t \mapsto \nu(t,\varphi)$. Also gilt $\nu(t,\varphi) \in E_\varphi$ und auch $d\nu(e_t) \in E_\varphi$. Damit steht $d\nu(e_t)$ senkrecht auf b'_t und –ohnehin– auf ν. Es muss daher $d\nu(e_t) \parallel df(e_t)$ gelten, d.h. e_t ist Hauptkrümmungsrichtung und jeder Meridian m_φ Krümmungslinie. Weil die Breitenkreise b_t senkrecht auf den Meridianen stehen, müssen auch sie Hauptkrümmungslinien sein (wie sieht man dies direkt?).

Die Hauptkrümmungen bestimmen wir nun als Normalkrümmungen der Meridiane $m_\varphi(t)$ bzw. der Breitenkreise $b_t(\varphi)$. Bestätigen wir die erste Identität von (18):

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \text{Normalkrümmung}\big(t \mapsto m_\varphi(t)\big) \overset{m_\varphi \text{ eben}}{=} \text{Krümmung}\big(t \mapsto \big(r(t), h(t)\big)\big)\\ &\overset{\text{Satz } I,3}{=} \frac{1}{|(r',h')|^3}\det\Big(\begin{pmatrix} r' \\ h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r'' \\ h'' \end{pmatrix}\Big)\end{aligned}$$

Die zweite zeigt man wie folgt. Die Breitenkreise sind ebene Kurven mit innerem Krümmungsvektor $(-\frac{1}{r(t)}, 0)$. Diesen Vektor müssen wir auf die innere Normale projizieren. Weil das Ergebnis von φ nicht abhängt, tun wir dies für $\varphi = 0$ in E_0:

$$\kappa_2 = \text{Normalkrümmung}\big(\varphi \mapsto b_t(\varphi)\big) = \Big\langle \begin{pmatrix} -1/r \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{h'^2 + r'^2}} \begin{pmatrix} -h' \\ r' \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Unsere geometrischen Argumentation macht Folgendes sofort klar: 1. Es gilt $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ genau für Punkte mit $r' = 0$ und 2. es gilt $\kappa_2 = 0$ genau für Punkte mit $h' = 0$.

4. Lokale Normalform und Deutung der Gauss-Krümmung

4.1. Lokale Normalform: Hauptkrümmungen als Koeffizienten der Taylorreihe. Flächen kann man lokal als Graph über ihrer Tangentialebene schreiben. Wir verallgemeinern zunächst die Darstellung I(11) von Kurven.

Lemma 8 (Lokaler Graph)**.** *Es sei (f, ν) ein durch U parametrisiertes Hyperflächenstück in $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner sei $p \in U$, $P := f(p)$, $N := \nu(p)$.*
Dann gibt es ein Gebiet $V \subset T_pf$ mit $0 \in V$ und eine Parametertransformation $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset U$, mit $\varphi(0) = p$, so dass für $\tilde f := f \circ \varphi$ gilt

$$\tilde f(X) = P + X + u(X)N \quad \textit{für alle } X \in V \subset T_pf. \tag{19}$$

Die Höhenfunktion $u\colon V \to \mathbb{R}$ ist glatt mit $u(0) = 0$ und $du_0 = 0$.

`10. Vorlesung, Montag 10.7.06` ____

Beweis. Es sei $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to T_pf$ orthogonale Projektion auf den Tangentialraum, d.h. $\pi(x) = x - \big\langle x, \nu(p)\big\rangle \nu(p)$. Die Abbildung

$$\psi := \pi \circ \big(f - P\big) \colon U \to T_pf$$

projiziert $f - P$ orthogonal auf den Tangentialraum. Speziell in p gilt

$$\psi(p) = 0, \qquad d\psi_p = d\pi \circ df_p \overset{\pi \text{ linear}}{=} \pi \circ df_p \overset{df_p(\mathbb{R}^n)=T_pf}{=} df_p.$$

Nach Lemma 1 ist $df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_pf$ ein Isomorphismus; also gilt dies auch für $d\psi_p$. Der Umkehrsatz, angewendet auf ψ in p, ergibt daher eine Umgebung V von 0 in T_pf, und eine lokale Umkehrabbildung $\varphi\colon V \to U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.

Zerlegen wir nun $\tilde f := f \circ \varphi\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal in Normal- und Tangentialanteil und definieren $u\colon V \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde f(X) - P = v + u(X)N \in T_pf \oplus N_pf.$$

so liefert dies (19). Klarerweise gilt $u(0) = 0$. Wir zeigen abschließend $du_0 = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt $d\tilde f_0(X) = \frac{d}{dt} f_0(0 + tY)|_{t=0} = Y + du_0(Y)\,N$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$; es gilt also $d\tilde f_0 = \mathrm{id} + du_0\,N$. Wegen

$$d\tilde f_0 = df_p \cdot d\varphi_0 = df_p \cdot (d\psi_p)^{-1} = \mathrm{id} \tag{20}$$

folgt $du_0\,N = 0$ und damit $du_0 = 0$. $\square$

Aus (20) folgern wir noch, dass $\tilde g_0(\cdot,\cdot) = \langle d\tilde f_0 \cdot, d\tilde f_0\ \cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Eine $\tilde g_0$-Orthonormalbasis von T_pf ist daher auch orthonormal bezüglich $\langle .,.\rangle$.

Nun können wir die Darstellung I(10) von Kurven auf Flächen verallgemeinern:

Satz 9 (Lokale Normalform)**.** *Es seien f und $\tilde f$ wie im Satz. Bezüglich einer Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von T_pf aus Hauptkrümmungsrichtungen, deren Hauptkrümmungen $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ seien, hat man folgende Darstellung:*

$$\tilde f(X) = P + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \kappa_i X^i X^i + O(|X|^3)\Big)N \qquad \text{für alle} \quad X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in V, \tag{21}$$

wobei $P := \tilde f(0) = f(p)$, $N := \tilde\nu(0) = \nu(p)$.

Beweis. Wir benutzen die Taylorentwicklung von u um 0:

$$u(X) = \underbrace{u(0)}_{=0} + \underbrace{du_0}_{=0}(X) + \frac{1}{2}d^2u_0(X,X) + O(|X|^3)$$

Wir wollen nun die Hesseform d^2u_0 durch die Hauptkrümmungen ausdrücken. Laut (19) gilt $d^2\tilde{f}_0(X,Y) = d^2u_0(X,Y)N$. Durch Bildung des Skalarprodukts mit $N = \tilde{\nu}(0)$ folgt

$$d^2u_0(X,X) = \left\langle d^2\tilde{f}_0(X,X),\, \tilde{\nu}(0)\right\rangle \overset{(10)}{=} \tilde{g}_0(\tilde{S}X,X)$$
$$= \tilde{g}_0\Big(\textstyle\sum_i \kappa_i X^i v_i,\, \sum_j X^j v_j\Big) \overset{v_k \text{ ONB}}{=} \displaystyle\sum_i \kappa_i X^i X^i.$$

Daraus folgt (21). ☐

Man nennt die Punktmenge

$$\Big\{ f(p) + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(p) X^i X^i\Big)\nu(p) \mid X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in T_p f \Big\}$$

das *Schmiegparaboloid* von f in p. Es charakterisiert das Verhalten einer Hyperfläche bis zur zweiten Ordnung, so wie es Schmiegkreise für Kurven tun. Speziell für Dimension $n = 2$ folgern wir:

Satz 10. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$.*
(i) Gilt $K(p) < 0$, dann ist $f(p)$ Sattelpunkt, d.h. in jeder Umgebung von p findet man Punktepaare, deren Bilder auf zwei verschiedenen Seiten (Zusammenhangskomponenten) von $f(p) + T_pf$ liegen.
(ii) Gilt $K(p) > 0$, dann ist f lokal konvex, d.h. es gibt eine Umgebung V von $f(p)$, so dass für alle $q \in V$ die Punkte $f(q)$ die eine Seite von $f(p) + T_pf$ nicht treffen.

Beachten Sie, dass wir im Fall $K(p) = 0$ keine Aussage treffen; tatsächlich könnte jede der beiden Fälle eintreten (Beispiele?).

Beweis. (*i*) Bis auf Numerierung gilt $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 < 0$. Für kleines $t \neq 0$ liegen nach (21) die Punkte tv_1 (in Richtung der ersten Hauptkrümmungsrichtung) auf derjenigen Seite von $f(p) + T_pf$ in die ν zeigt, und Punkte tv_2 (in Richtung der zweiten Hauptkrümmungsrichtung) auf der entgegengesetzten Seite.

(*ii*) κ_1 und κ_2 haben das gleiche Vorzeichen. Der quadratische Term von (21) dominiert dann den $O(|X|^3)$-Term auf einer Umgebung von 0, und daher liegen alle Bilder einer solchen Umgebung zu einer Seite des Tangentialraums. ☐

Beispiel. Der Torus hat zwei berührende Ebenen senkrecht zur Rotationsachse, die den Torus jeweils in einem Kreis schneiden. Entfernen wir diese beiden Kreise, so erhalten wir zwei Zusammenhangskomponenten. Die eine, auf der Innenseite, besteht nur aus Sattelpunkten; daher gilt dort $K \leq 0$. Auf der anderen, der Außenseite, ist der Torus lokal konvex, und daher gilt $K \geq 0$. Dass diese Ungleichungen strikt sind, kann man ohne Rechnen nicht sehen. Auf jeden Fall gilt aber in den Kreisen $K = 0$, denn die Gauß-Krümmung ist stetig.

4.2. **Die Gauß-Krümmung kompakter Hyperflächen.** Als Anwendung der lokalen Normalform zeigen wir den folgenden Satz.

Satz 11. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M := \partial A$. Dann gibt es einen Punkt $P \in M$, für den alle Hauptkrümmungen positiv sind; insbesondere ist die Gauß-Krümmung positiv.*

Wie in Analysis 3 gezeigt, lässt sich eine implizit gegebene Menge M lokal als parametrisiertes Flächenstück $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ darstellen. Dabei ist f sogar Einbettung, und deshalb ist der Tangentialraum $T_p f$ des Flächenstücks gerade der Tangentialraum $T_P M$ der Mannigfaltigkeit M in $P = f(p)$.

Beweis. Auf der kompakten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nimmt die stetige Funktion $|x|$ ein Maximum R in einem Punkt $P \in M$ an, d.h.

$$\exists P \in \mathbb{S}^n_R \cap M \quad \text{mit} \quad M \subset \overline{B_R} := \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \le R\big\}.$$

Im Punkt P hat ∂B_R die Tangentialebene $P^\perp$. Wir behaupten, dass $P^\perp$ auch die Tangentialebene von M in P ist. Wenn nicht, gäbe es ein $X \in T_p M$ mit $\langle X, P\rangle \neq 0$. Ersetzen wir gegebenfalls X durch $-X$, so folgt $\langle X, P\rangle > 0$. Aus der lokalen Normalform (21) erhalten wir die für kleine t gültige Darstellung

$$\tilde f(tX) = P + tX + O(t^2)N \quad \Rightarrow \quad |\tilde f(tX)|^2 = R^2 + 2t\langle P, X\rangle + O(t^2).$$

Dies ergibt

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\ge} \frac{|\tilde f(tX)|^2 - R^2}{t} = 2\langle P, X\rangle + O(t);$$

die rechte Seite ist aber positiv für kleine $t > 0$, ein Widerspruch. Dies zeigt $T_P M = T_P(\partial B_R) = P^\perp$.

Im Punkt P können wir also die innere Normale $N := -\frac{P}{|P|}$ als Normale beider Flächen wählen. Wir verwenden erneut die Normalform (21): Sei $\tilde f$ die Normalform von M und $\tilde s$ die der Sphäre. Dann sind die Parametrisierungen $\tilde f$ und $\tilde s$ auf einer geeignet kleinen Umgebung $V \subset T_P M = T_P \mathbb{S}_R = P^\perp$ von 0 definiert und es gilt

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\le} \big\langle \tilde f - \tilde s,\, N\big\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\kappa_i - \frac{1}{R}\Big) X^i X^i + O\big(|X|^3\big) \qquad \text{für alle } X = \sum X^i v_i \in V.$$

Daraus folgt $\kappa_i \ge \frac{1}{R}$ für jedes $1 \le i \le n$ und insbesondere $K \ge \frac{1}{R^n} > 0$. □

Bemerkung. Im Satz haben wir $M = \partial A$ vorausgesetzt, damit M eingebettet ist. Allerdings haben wir diese Tatsache im Beweis nicht wirklich benutzt. Tatsächlich gilt der Satz auch noch für immersierte Untermannigfaltigkeiten, d.h. M darf das Bild einer Immersion einer kompakten Mannigfaltigkeit sein.

Übung: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Kurven.

Eine *Minimalfläche* ist definiert als eine Fläche mit $H \equiv 0$. Man kann zeigen, dass jede Fläche mit Rand, die den Inhalt minimiert (z.B. bei festen Randbedingungen), tatsächlich $H \equiv 0$ erfüllt. Offenbar können für eine Minimalfläche, die ein Kompaktum berandet, nicht alle Hauptkrümmungen dasselbe Vorzeichen haben und daher folgt:

Korollar 12. *Eine Minimalfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ kann nicht kompakt sein.*

4.3. **Gauß-Krümmung als Verzerrung der Gauß-Abbildung.** Für nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven hatten wir in I(5) gesehen, dass $\nu' = -\kappa c'$ gilt; nach der Substitutionsregel stimmt dies sogar für reguläre Kurven. Die Kurve c bildet ein kleines Intervall des Definitionsbereichs auf ein Kurvenstück ab, dessen Länge in erster Ordnung um den Faktor $|c'|$ gestreckt ist. Wir sehen diesen Faktor als Längenverzerrung der Kurve an. Entsprechend ist das Normalbild $\nu(t)$ eine Kurve in $\mathbb{S}^1$, die Urbildlängen um den Faktor $|\nu'|$ verzerrt. Daher können wir die Gleichung $\nu' = -\kappa c'$ deuten als

$$|\kappa(t)| = \frac{|\nu'(t)|}{|c'(t)|} = \frac{|\text{Längenverzerrung von } \nu \text{ in } t|}{|\text{Längenverzerrung von } c \text{ in } t|}.$$

Ganz ähnlich hat Gauß $K(p)$ definiert, und zwar als den Quotienten

$$\frac{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } \nu \text{ in } p|}{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } f \text{ in } p|}.$$

Im Spezialfall einer linearen Abbildung ℓ ist der Verzerrungsfaktor des Flächeninhalts gerade durch $|\det \ell|$ gegeben. Weil f in erster Ordnung durch df approximiert wird, ist der Nenner des Ausdrucks daher gerade $|\det df_p|$; entsprechend der Zähler $|\det d\nu_p|$. Wir erhalten also für den Quotienten

$$\frac{|\text{Verzerrung von } d\nu_p \colon \mathbb{R}^n \to T_pf|}{|\text{Verzerrung von } df_p \colon \mathbb{R}^n \to T_pf|} = \frac{|\det d\nu_p|}{|\det df_p|} = \big|\det\big((df_p)^{-1} d\nu_p\big)\big| = |\det S_p| = |K(p)|.$$

Unsere Definition stimmt daher tatsächlich mit der von Gauß überein, jedenfalls im Betrag. Im Kurven- wie im Flächenfall kann man die Gleichungen aber auch ohne Betragsstriche aufstellen, wenn man die Orientierung richtig berücksichtigt; in beiden Fällen verbleibt dann ein Minuszeichen in den Gleichungen.

Beispiele. 1. Für $\mathbb{S}^n$ ist $\nu = -f$; aus obiger Eigenschaft folgt $|K| = 1$.
2. Für den Zylinder ist das Gaußbild ein Großkreis von $\mathbb{S}^2$, also niederdimensional. Der Flächeninhalt wird also unter ν auf das 0-fache verzerrt, und $K \equiv 0$ folgt. Ebenso für die Ebene.

`11. Vorlesung, Montag 10.7.06` ______________________________

5. Bézierflächen

Bézierkurven, wie sie im Abschnitt 4 eingeführt wurden, erlauben zwei verschiedene natürliche Verallgemeinerungen auf den Flächenfall: Zum einen gibt es die Tensorprodukt-Bézierflächen, die über dem Einheitsquadrat definiert sind, und zum anderen gibt es Dreiecks-Bézierflächen. Beide Konstruktionen lassen sich problemlos auch auf Polynome in beliebig vielen Variablen übertragen.

5.1. **Tensorprodukt-Bézierflächen.** Wir erinnern an die univariaten Bernstein-Polynome $b_k^n(t) := \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$ aus (20). Wir betrachten nun die $(k+1)(\ell+1)$ Produkte von Bernstein-Polynomen

$$0 \leq b_k^n(u) b_\ell^m(v) \leq 1, \qquad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq \ell \leq m. \tag{22}$$

Sie bilden eine Basis der Polynome vom Bigrad (n,m) (Beweis wie im univariaten Fall) und sie stellen eine Partition der Eins dar:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} b_k^n(u) b_\ell^m(v) = \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k^n(u)\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell^m(v)\Big) = 1. \tag{23}$$

Wir definieren nun polynomiale Flächen, d.h. Flächen, die in jeder Komponente ein Polynom sind, indem wir gegebene Punkte mit den multivariaten Bernstein-Polynomen (22) gewichten:

Definition. Es seien $p_{k,\ell} \in \mathbb{R}^3$ für $0 \leq k \leq n$, $0 \leq \ell \leq m$ gegeben. Dann nennt man

$$f(u,v) := \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} p_{k,\ell}\, b_k^n(u) b_\ell^m(v), \qquad (u,v) \in [0,1]^2.$$

eine *Tensorprodukt-Bézierfläche vom Bigrad* (n,m) zu den *Kontrollpunkten* $p_{k,\ell}$. Die stückweise geradlinige Verbindung benachbarter Kontrollpunkte liefert das *Kontrollnetz.*

Das Definitionsgebiet von f ist also stets das Einheitsquadrat. Genauso wie im Kurvenfall brauchen die Flächen nicht unbedingt eine Immersion darzustellen so dass sie nicht unbedingt Flächen im Sinne der Differentialgeometrie sind.

Die Parameterlinien sind Bézierkurven vom Grad n bzw. m, z.B.

$$u \mapsto f(u,v) = \sum_{k=0}^{n} p_k^v b_k^n(u), \quad \text{wobei} \quad p_k^v := \sum_{\ell}^{m} p_{k,\ell}\, b_\ell^m(v).$$

Es gilt $b_\ell^m(0) = 1$ für $\ell = 0$ und 0 sonst. Für die Randkurven, z.B. mit $v = 0$, folgt daher

$$u \mapsto f(u,0) = \sum_{k=0}^{n} p_{k,0}\, b_k^n(u); \tag{24}$$

die Randkurven von f sind also Bezierkurven durch die Randkontrollpunkte. Insbesondere stimmt eine Bézierfläche stets mit den vier Außeneckpunkten überein. Aus (24) folgert man mit Hilfe der Randtangentenformel für Bézierkurven, dass der Tangentialraum in den Ecken durch die beiden benachbarten Kontrollpunkte aufgespannt wird. Beispielsweise wird der Tangentialraum von $p_{0,0}$ durch die drei Punkte

$$p_{0,0}, p_{1,0}, p_{0,1}$$

aufgespannt, sofern die drei Punkte paarweise verschieden sind.

Viele Eigenschaften übertragen sich von Bézierkurven auf Bézierflächen:

1. *Konvexe Hülle.* Die Spur der Bézierfläche f liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte. Wie im Kurvenfall folgt dies aus (23).

2. *Affine Invarianz.* Das affine Bild einer Bézierfläche entspricht der Bézierfläche zum affinen Bild der Kontrollpunkte. Der Beweis überträgt sich wörtlich.

3. *Lineare Unabhängigkeit.* Eine Bézierfläche ist genau dann identisch Null, wenn alle Kontrollpunkte verschwinden.

4. *Auswertung.* Die Auswertung einer Bézierfläche an der Stelle (u, v) erfolgt durch iterierte Anwendung des Auswertungsschemas für Kurven,

$$p_k^v := \sum_{\ell}^{m} p_{k,\ell} b_\ell^m(v), \quad k = 0, \dots, n$$
$$f(u, v) := \sum_{k=0}^{n} p_k^v b_k^n(u).$$

Es scheint unbekannt, ob sich auch eine Variationsminderung für Flächen formulieren lässt.

5.2. **Dreiecks-Bézierflächen:** Sei $D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : u + v \leq 1\}$ das Einheitsdreieck. Ausgehend von der Identität

$$1 = (u + v + w)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \qquad w := 1 - u - v$$

definiert man analog zum Kurvenfall die bivariaten Bernsteinpolynome

$$b_{i,j,k}^n(u, v) := \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \qquad i + j + k = n, \quad u + v + w = 1, \quad (u, v) \in D$$

vom Grad n. Diese sind linear unabhängig und bilden eine Basis des Raums aller bivariaten Polynome vom (totalen) Grad $\leq n$.

Definition. Es seien Punkte $p_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3$ für $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ mit $i + j + k = n$ gegeben. Dann nennt man die polynomiale Fläche vom Grad $\leq n$

$$f : D \to \mathbb{R}^3, \qquad f(u, v) := \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}^n \, p_{i,j,k}$$

eine *Dreiecks-Bézierfläche* zu den Kontrollpunkten $p_{i,j,k}$. Die geradlinige Verbindung benachbarter Kontrollpunkte liefert das Kontrollnetz.

Beispiel: Für $n = 1$ parametrisiert $f(u, v) = up_{1,0,0} + vp_{0,1,0} + wp_{0,0,1}$ das Dreieck mit Eckpunkten $p_{1,0,0}, p_{0,1,0}, p_{0,0,1}$. Man nennt (u, v, w) *baryzentrische Koordinaten* eines Dreiecks bezüglich seiner Eckpunkte.

Es gelten wieder die konvexe-Hüllen-Eigenschaft und die affine Invarianz, nicht aber die Variationsminderung. Die drei Eckpunkte einer Dreiecks-Bézierfläche sind genau die Eckpunkte des Kontrollnetzes,

$$f(1, 0) = p_{n,0,0}, \quad f(0, 1) = p_{0,n,0}, \quad f(0, 0) = p_{0,0,n}.$$

Die Randkurven sind Bézierkurven vom Grad $\leq n$, die durch die entsprechenden Randpunkte des Kontrollnetzes gegeben sind. Z.B. folgert man aus $b^n_{i,j,k}(u, 0) = 0$ für $j > 0$, dass

$$f(u, 0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} p_{i,0,n-i} = \sum_{i=0}^{n} b^n_i(u) p_{i,0,n-i}.$$

Daraus lässt sich einfach ableiten (wie?), dass die Tangentialebenen in den Eckpunkten im Allgemeinen durch die Eckpunkte des Kontrollnetzes sowie jeweils die beiden benachbarten Kontrollpunkte aufgespannt werden. Beispielsweise wird die Tangentialebene im Punkt $f(1, 0)$ durch die Kontrollpunkte

$$p_{n,0,0}, \; p_{n-1,1,0}, \; p_{n-1,0,1}$$

aufgespannt, sofern diese linear unabhängig sind.

Für die Auswertung einer Dreiecks-Bézierfläche lässt sich aus der Rekursionsformel

$$b^n_{i,j,k} = ub^{n-1}_{i-1,j,k} + vb^{n-1}_{i,j-1,k} + wb^{n-1}_{i,j,k-1}$$

ein Algorithmus analog zum de Casteljau-Schema ableiten.

6. ÜBUNGSAUFGABEN

6.1. **Parametrisierte Flächen.**

Aufgabe 1 – Tangential- und Normalraum (Reif 08):

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Hyperfläche, $\tilde{f} = f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung, $p \in U$ und $\tilde{p} = \varphi^{-1}(p)$.

a) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum eine Eigenschaft von $[f]$ ist, d.h. $T_p f = T_{\tilde{p}} \tilde{f}$.
b) Zeigen Sie, dass der orientierte Normalenvektor eine Eigenschaft von $\langle f \rangle$ ist, d.h. $\nu(p) = \tilde{\nu}(\tilde{p})$ falls $\det D\varphi > 0$.

Aufgabe 2 – Katenoid und Helikoid sind isometrisch (GB 02):

Zwei Immersionen $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$k(x,y) := (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y).$$

Man nennt k das *Katenoid* und h das *Helikoid.*

a) Skizzieren Sie beide Flächen.
Tipp: Was sind die Parameterlinien $x \mapsto k(x,y)$ bzw. $h(x,y)$ sowie $y \mapsto \ldots$?
b) Zeigen Sie, dass ihre beiden ersten Fundamentalformen übereinstimmen.

Aufgabe 3 – Parametrisierungen der Sphäre (GB 02):

Gegeben sei die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ sowie die beiden Parametrisierungen

$$k(x,y) := (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x) \quad \text{für } (x,y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$
$$s(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man nennt k Parametrisierung in *Kugelkoordinaten* und s die Parametrisierung durch *stereographische Projektion.*

a) Zeigen Sie, dass sowohl k als auch s Teilmengen von $\mathbb{S}^2$ parametrisieren. Welche Teilmengen sind dies?
b) Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen Immersionen sind, d.h. dk_p und ds_p besitzen vollen Rang für alle p im jeweiligen Definitionsbereich.
c) Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen injektiv sind.
d) Im Punkt $(1,0,0) \in \mathbb{S}^2$ ist $v := (0,1,0)$ ein Tangentialvektor an $\mathbb{S}^2$. Suchen Sie den entsprechenden Vektor im Urbild, d.h. finden Sie X mit $v = df_p(X)$ für $f = k$ bzw. $f = s$.
e) Es sei $N := (0,0,1)$ der Nordpol von $\mathbb{S}^n$. Zeigen Sie, dass die stereographische Abbildung s durch folgendes geometrische Verfahren beschrieben wird. Ein Punkt (x,y) wird auf denjenigen Punkt der Geraden $\big\{\lambda(x,y) + (1-\lambda)N \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}$ abgebildet, der auf $\mathbb{S}^2$ liegt.

Aufgabe 4 – Kugelkoordinaten (Reif 08):

Die Standard-Parametrisierung einer Kugel mit Radius r um den Ursprung lautet

$$k(u,v) = \begin{bmatrix} r\cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{bmatrix}, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi, 2].$$

Eine *Loxodrome* ist eine Kurve auf der Kugel, deren Winkel zu den Parameterlinien von k konstant ist.

a) Betrachten wir speziell die Erdkugel. Identifizieren Sie die Parameterlinien von k mit Längen- und Breitenkreisen. Wie erhält man den Äquator, Nord- und Südpol? Diskutieren Sie die Bedeutung von Loxodromen für die Schifffahrt.

b) Ist k eine Immersion?

c) Sei

$$c(t) = [u(t),\, v(t)] = [\ln \cot(\pi/4 - t/2),\, t], \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Skizzieren Sie die Koordinatenfunktion $u(t)$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Flächenkurve $k \circ c$ um eine Loxodrome mit Richtung "'Nord-Ost"' handelt.
Hinweis: Im Verlauf der Rechnung kann die Formel $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ nützlich sein.

d) Berechnen Sie die Länge von $k \circ c$.

Aufgabe 5 – Rotationsflächen (Bergner 04):

Gegeben ist die Kurve $c(t) = (r(t), h(t)) : [a,b] \to (0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Wir legen diese Kurve in die x,z-Ebene des $\mathbb{R}^3$ und rotieren diese Kurve um die z-Achse. Dann erhält man die Rotationsfläche

$$f(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)) \quad \text{für } (t,\varphi) \in [a,b] \times [0,2\pi]\ .$$

a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ der Rotationsfläche. Welche Bedingung muss die Kurve c erfüllen, damit f eine Immersion ist?

b) Mit Hilfe des Oberflächenelementes (Gramsche Determinante) kann man bekanntlich den Flächeninhalt wie folgt berechnen:

$$A := \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(g_{ij}(t,\varphi))}\, d\varphi dt\ .$$

Leiten Sie daraus eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes von Rotationsflächen her.

c) Gemäß der *ersten Guldinsche Regel* ist der Flächeninhalt der Spur von f gleich dem Produkt aus der Länge von c und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve c bei der Rotation beschreibt. Erklären Sie diese Regel anhand des Resultats aus Teil b).

d) Sei nun c ein Kreis um den Punkt $(R,0,0)$ mit Radius $r < R$, dann parametrisiert f einen *Torus*. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt ohne Rechung.

Aufgabe 6 – Paralleler Rahmen und Röhrenflächen (GB 96):

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir betrachten einen orthonormalen Rahmen $\big(e_1(t) := c'(t),\, e_2(t), e_3(t)\big)$, der für alle $t \in [a,b]$ orthonormal ist. Es sei $E(t)$ die 3×3-Matrix mit Zeilen $e_i(t)$.

a) Wie bei Frenet-Kurven schreiben wir die Abgleichungsgleichungen als ein System $E' = KE$ auf. Zeigen Sie, dass K stets die Form $K = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ hat, wobei α, β, γ Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ sind.

b) Wir betrachten nun *Röhrenflächen*

$$F_\varepsilon \colon U := [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad F_\varepsilon(t,\varphi) := c(t) + \varepsilon\big(\cos\varphi\, e_2(t) + \sin\varphi\, e_3(t)\big).$$

Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, abhängig von α, β, γ, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Abbildung F_ε eine Immersion darstellt. Wir setzen von nun an $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ voraus.

c) Charakterisieren Sie nun die Tatsache, dass die Parameterlinien von F_ε senkrecht aufeinander stehen, d.h. $0 = g\big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\big)_p$ für jedes $p \in U$, durch eine Bedingung an die Matrix K.

d) Zeigen Sie: Für jede Kurve c kann man einen orthonormalen Rahmen $(e_1 = c',\, v, w)$ finden, so dass die Parameterlinien von F_ε aufeinander senkrecht stehen. Hierzu drücken Sie zunächst v und w bezüglich des gegebenen Rahmens E aus, und lösen dann eine Differentialgleichung. *Bemerkung*: Weil v und w so wenig wie möglich längs c rotieren, kann man sich vorstellen, dass man $v(t_0)$, $w(t_0)$ so gut, wie es nur geht, parallel verschiebt, um $v(t), w(t)$ zu erhalten. Man nennt (c', v, w) daher einen *parallelen Rahmen.*

6.2. **Gauß-Abbildung.**

Aufgabe 7 – Gauß-Abbildung einer impliziten Hyperfläche (Bergner 04):

Zu $U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Hyperfläche $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n+1})$ mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Menge $f(U)$ werde implizit beschrieben durch eine Abbildung $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, d.h.

$$f(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in f(U)\,.$$

a) Geben Sie die Einheitssphäre und eine Ursprungsebene durch 0 mit Normale ν in impliziter Form an.

b) Zeigen Sie: Für jedes $p \in U$ steht der Vektor $\nabla\varphi(f(p))$ senkrecht auf allen Tangentialvektoren $df_p(X) \in T_p f$.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\nu(x) := \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$ stetig nach $\mathbb{S}^n$ abbildet und somit eine Gauß-Abbildung ist.

d) Falls zusätzlich $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ gilt, wie glatt ist dann die Abbildung ν?

Zusatz: Kann man zu jeder Hyperfläche f eine implizite Darstellung φ mit obigen Eigenschaften konstruieren?

Aufgabe 8 – Parallelflächen (GB 02):

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ Hyperflächenstück, so definieren wir die *Parallelfläche* im Abstand s durch

$$f^s\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad f^s(p) := f(p) + s\nu(p).$$

a) Falls f^s Immersion ist, so ist durch ν eine Gauß-Abbildung von f^s gegeben.
b) Berechnen Sie die erste Fundamentalform g^s von f^s aus $g =: g^0$.
c) Drücken Sie $\frac{\partial}{\partial s} g^s(X,Y)\big|_{s=0}$ durch die zweite Fundamentalform von f aus.
d) Zeigen Sie: Für jede kompakte Umgebung $p \in V \subset\subset U$ gibt es ein $s_0 > 0$, so dass die Parallelfläche $f^s\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion darstellt für alle $|s| < s_0$.
Tip: Sie müssen nur $g^s_p(X,X) > 0$ für $p \in V$ und $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ zeigen.

6.3. **Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.**

Aufgabe 9 – Krümmungen am Beispiel (Bergner 04):

Wählen Sie sich einen gekrümmten Körper, z.B. eine Kaffeetasse, einen Stift, Ihren Stuhl, etc. Versuchen Sie die Gebiete mit $K > 0$ und $K < 0$ voneinander abzugrenzen. Können Sie in ausgewählten Punkten auch die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmen?

Aufgabe 10 – Umparametrisierung (Reif 08):

Sei $\tilde{f} := f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von f. Zeigen Sie: Wenn v eine Hauptkrümmungsrichtung von f ist, dann gibt es eine Hauptkrümmungsrichtung $\tilde{v}$ von $\tilde{f}$ mit $df\, v = d\tilde{f}\, \tilde{v}$.

Aufgabe 11 – Skalierung von Flächen (Bergner 04):

Zu einer Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n+1})$ betrachten wir die skalierte Fläche $f_\lambda(p) := \lambda f(p)$ zu einem $\lambda > 0$. Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform von f_λ und daraus mittlere und Gaußkrümmung von f_λ in Abhängigkeit von f.

Aufgabe 12 – Bewegungsinvarianz (Reif 08):

Sei A eine orthogonale Matrix, q ein Vektor und $\hat{f} := Af + q$ die Fl“ache, die durch die zugeh”orige Bewegung aus f hervorgeht. Zeigen Sie:

a) Wenn ν eine Gauss-Abbildung von f ist, dann ist $\hat{\nu} := A\nu$ eine Gauss-Abbildung von $\hat{f}$.
b) Mit $\hat{\nu} = A\nu$ gilt $S = \hat{S}$.

Aufgabe 13 – Normal- und geodätische Krümmung (GB 05):

Wir betrachten Kurven auf dem Einheitszylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Was ist die innere Normale im Punkt $(x,y,z) \in Z$?

b) Wählen Sie (α, β), so dass die Schar von Helices $c(t) = (\cos\alpha t, \sin\alpha t, \beta t)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.
c) Berechnen Sie Normal- und geodätische Krümmung. Für welche Kurven ist die Normalkrümmung extremal?

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe ohne Parametrisierung der Fläche auskommen: nur eine Parametrisierung der Kurve wird gebraucht, um deren Krümmungen auszurechnen.

Aufgabe 14 – Katenoid und Helikoid sind minimal (GB 02):

Wir betrachten wieder Katenoid und Helikoid $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$k(x,y) := (\cosh x\, \cos y,\, \cosh x\, \sin y,\, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x\, \sin y,\, -\sinh x\, \cos y,\, y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Gaussabbildungen ν für k und h übereinstimmen.
b) Berechnen Sie $\partial_1\nu$ und $\partial_2\nu$ und daraus die Weingartenabbildungen.
c) Ermitteln Sie nun die Hauptkrümmungen sowie mittlere und Gausskrümmung dieser Flächen.

Aufgabe 15 – Weingartenabbildung der Sphäre (Bergner 04):

Gegeben ist die Sphäre $\mathbb{S}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p| = r\}$ vom Radius r.

a) Zeigen Sie: Für jede beliebige Parametrisierung $f : U \to \mathbb{S}^n_r$ ist $\nu(p) := \frac{1}{r} f(p)$ eine Gaussabbildung.
b) Ermitteln Sie nun die Weingartenabbildung und daraus mittlere sowie Gausskrümmung von $\mathbb{S}^n_r$.

Aufgabe 16 – Mittlere Krümmung von Graphen (Bergner 04):

Die Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ sei ein Graph über der x,y-Ebene, dass heisst $f(x,y) = (x, y, u(x,y))$ für ein $u \in C^2(U, \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform in Abhängigkeit von u.
b) Ermitteln Sie die mittlere Krümmung $H(x,y)$ der Fläche f in Abhängigkeit von u.
c) Zeigen Sie nun, dass die nichtlineare elliptische Differentialgleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2H(x,y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } U \tag{25}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 17 – Hyperbolisches Paraboloid (GB 02):

Wir untersuchen das *hyperbolische Paraboloid*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x, y, xy).$$

a) Zeigen Sie: Durch jeden Punkt $f(x,y)$ gehen zwei verschiedene Geraden, welche auf der Fläche liegen. Diese Geraden sind Asymptotenlinien.
Bemerkung: Daher gibt es von Geraden berandete Vierecke auf dem Paraboloid, und diese Vierecke werden selbst von zwei Geradenscharen geblättert. Aus diesem Grund setzen Architekten diese Fläche gern als gekrümmte Dachfläche ein.

b) Eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ besitze im Punkt $f(x,y)$ eine Asymptotenlinie.
Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel, dass die Gausskrümmung $K(x,y) \leq 0$ erfüllt.
Insbesondere gilt also $K(x,y) \leq 0$ auf dem hyperbolischen Paraboloid.

c) Parametrisieren Sie um: Wir bezeichnen die Höhenfunktion mit $u(x,y) := xy$. Es sei $\varphi(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}+\tilde{y}, -\tilde{x}+\tilde{y})$ eine 45-Grad-Drehung. Was ist $\tilde{u} := u \circ \varphi$? Deuten Sie (x,y,h) und $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{h})$ im Sinne des Satzes über die lokale Normalform.

Aufgabe 18 – Hyperbolisches Paraboloid (Reif 08):

Gegeben seien die beiden Flächen $f(u,v) = [u, v, u^2/2 \pm v^2/2]^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie jeweils

a) die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingarten-Abbildung in Matrixdarstellung;

b) die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 sowie Gausskrümmung K und mittlere Krümmung H;

c) die Hauptkrümmungsrichtungen $v_i, i \in \{1,2\}$, sowie die zugehörigen Vektoren $w_i := df\, v_i$ im Tangentialraum;

d) den Grenzwert $\lim_{(u,v)\to(0,0)} w_i(u,v)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 19 – Affensattel (GB 02):

Wir betrachten den Graphen $f(x,y) := \big(x, y, u(x,y)\big)$ mit $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$.

a) Der Graph ist invariant unter Drehspiegelung um 60 Grad um die z-Achse, d.h. für $R(\varphi) := \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ gilt $u \circ R(\frac{\pi}{3}) = -u$. (Es ist am einfachsten, dafür $u(2R(x,y)) = -u(2x,2y)$ zu zeigen.)

b) Wir wollen nun den Graphen f verstehen. Notieren Sie in einer Skizze der (x,y)-Ebene zuerst die Funktionswerte von u entlang der Geraden $y \mapsto (0,y)$, sowie diejenigen auf den um Vielfache von 60 Grad rotierten Geraden. Berechnen Sie dann $u(x,0)$ und halten Sie auch diese Werte in der Skizze fest, zusammen mit den Werten auf den rotierten Geraden. Warum heißt die Fläche *Affensattel*?

c) Überlegen Sie zuerst, welchen Wert die Hauptkrümmungen im Punkt $(x,y) = 0$ haben können (denken Sie an die lokale Normalform!). Rechnen Sie dies dann nach, wobei Sie die Formel für die zweite Fundamentalform eines Graphen mit horizontaler Tangentialebene verwenden.

d) Zeigen Sie, dass der Graph spiegelsymmetrisch zur (x,z)-Ebene ist. Folgern Sie daraus, dass $x \mapsto f(x,0)$ eine Krümmungslinie ist. Das gleiche gilt nach Drehungen um Vielfache von 60 Grad. Es gehen daher drei verschiedene Krümmungslinien durch den Nullpunkt.

Aufgabe 20 – Hauptkrümmung und Symmetrie:

Es sei $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales Flächenstück. Wir nehmen an, dass der Ursprung $f(p) = 0$ in der Fläche liegt und der Tangentialraum $T_p f$ die xy-Ebene ist.

a) Es sei $R_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um 120° um die z-Achse. Zeigen Sie: Ist $f(U)$ invariant unter der Drehung R, so stimmen die Hauptkrümmungen in p überein. Man sagt, der Punkt p ist ein *Nabelpunkt [umbilic]*.
b) Gilt das Ergebnis von Teil a) für jede Drehung R_k vom Winkel $2\pi/k$ mit $k = 2, 3, \ldots$?
c) Sei $R_6\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um 60° um die z-Achse und S die Spiegelung an der xy-Ebene. Zeigen Sie: Ist $f(U)$ invariant unter $R_{\overline{6}} := S \circ R_6$, so verschwinden beide Hauptkrümmungen in p. Man sagt, der Punkt p ist ein *Flachpunkt*.
d) Geben Sie ein Beispiel einer (nicht rotationssymmetrischen) Fläche wie in Teil a). Genügt sie auch Teil c)?

Aufgabe 21 – Flächen, die ganz aus Nabelpunkten bestehen (GB 02):

Auf Flächen ($n = 2$) nennt man Punkte p mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte*. Offenbar bestehen $\mathbb{S}^2_r$ und $\mathbb{R}^2$ ganz aus Nabelpunkten. In dieser Aufgabe beweisen wir die Umkehrung dieser Feststellung: *Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, für die jedes $p \in U$ ein Nabelpunkt ist, also $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) =: \kappa(p)$. Dann ist $f(U)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre $\mathbb{S}^2_r$ mit $r > 0$ enthalten.*

a) Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion κ konstant auf U ist. Berechnen Sie dazu $\partial_{12}\nu(p) - \partial_{21}\nu(p)$, und schließen Sie daraus $0 = \partial_1\kappa(p) = \partial_2\kappa(p)$. Warum zeigt dies, dass κ konstant ist?
b) Zeigen Sie, dass im Falle $\kappa(p) \equiv 0$ die Parametrisierung in einer Ebene liegt.
c) Nun wollen wir zeigen, dass im Fall $\kappa(p) \equiv \kappa \neq 0$ die Fläche $f(U)$ in einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{\kappa}$ liegt. Zeigen Sie dazu durch Differentiation, dass $f(p) + \frac{1}{\kappa}\nu(p)$ konstant ist und daher den Mittelpunkt der gesuchten Sphäre definiert.

Aufgabe 22 – Regelflächen (GB 02):

Es sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ glattes Vektorfeld. Die Fläche

$$f\colon (\alpha, \beta) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(s, t) := c(t) + sV(t).$$

nennt man *Regelfläche*.

a) Zeigen Sie, dass Zylinder und Kegel Regelflächen sind. Welche weiteren Beispiele von Regelflächen kennen Sie?
b) Zeigen Sie: Das Bild einer Regelfläche unter einer linearen Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wieder Regelfläche.
c) Es seien die Vektoren $c'(t)$ und $V(t)$ für $t \in [a, b]$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist. Wir setzen dies von nun an voraus.

d) Zeigen Sie $K(s,t) \leq 0$ für die Gausskrümmung der Regelfläche. Warum gilt $K(s,t) < 0$ genau dann, wenn die Vektoren $V(t), V'(t), c'(t)$ linear unabhängig sind?
e) Eine Regelfläche hat Gauß-Krümmung $K \equiv 0$ genau dann, wenn die Normale ν längs jeder Regelgeraden konstant ist.

Aufgabe 23 – Rotationsfläche der Traktrix (GB 02):

Wir betrachten die Traktrix

$$(r,h)(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \quad \text{für } t > 0$$

und untersuchen nun die von ihr erzeugte Rotationsfläche $f(t,\varphi) = \big(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)\big)$.

a) Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 dieser Fläche.
b) Zeigen Sie nun, dass die Gausskrümmung dieser Fläche konstant ist.

Aufgabe 24 – Rotationsflächen konstanter Gauß-Krümmung (GB 02):

Zu der nach Bogenlänge parametrisierten Meridiankurve $(r,h)(t)\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$, $r'^2 + h'^2 = 1$, betrachten wir die erzeugte Rotationsfläche. Wir wollen alle solche Flächen mit konstanter Gausskrümmung $K \equiv c$ untersuchen.

a) Warum braucht man nur die Rotationsflächen mit $K \equiv -1, 0, +1$ zu ermitteln, wenn man alle Rotationsflächen mit konstantem K bestimmen möchte?
b) Leiten Sie aus $K \equiv c$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für r her und lösen Sie diese. Geben Sie danach eine Integraldarstellung der Funktion h an.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$.
c) Geben Sie im Fall $K \equiv 0$ explizit die Funktionen r und h an. Welche Rotationsflächen ergeben sich hier?
d) Wir betrachten nun den Fall $K \equiv 1$. Zeigen Sie, dass $r(t) = a\cos t$ zu $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung aus a) ist. Berechnen Sie $h(t)$ im Falle $a = 1$ explizit und skizzieren Sie die Meridiankurve. Im Falle $0 < a < 1$ und $a > 1$ lässt sich h nicht mehr elementar darstellen, Sie können Sie jedoch qualitative Aussagen (Definitionsbereich, Wertebereich und Monotonie von r und h) angeben und somit ebenfalls für diese Fälle die Meridiankurve skizzieren.

Bemerkung: Ebenso kann man auch für $K \equiv -1$ vorgehen; Mit der Traktix haben wir ein Beispiel für diesen Fall bereits konstruiert.

Aufgabe 25 – Tangentialebene (Bergner 04):

Zeigen Sie für eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die folgenden Aussagen:

a) Gilt für die Gausskrümmung $K(p) > 0$ in einem Punkt $p \in U$, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $f(V)$ auf einer Seite der Tangentialebene T_pf liegt.
b) Gilt andererseits $K(p) < 0$, so existieren in jeder Umgebung $V \subset U$ von p zwei Punkte $p_1, p_2 \in V$, so dass $f(p_1)$ und $f(p_2)$ auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene T_pf liegen.

Aufgabe 26 – Asymptotenrichtungen (GB 05):

Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt *Asymptotenrichtung* in $p \in U$, wenn die Normalkrümmung $g_p(S_pX, X) = 0$ erfüllt. Benutzen Sie die Eulerformel um für zweidimensionale Flächen $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ zu zeigen:

a) Die Gaußkrümmung ist genau dann in einem Punkt p negativ, wenn durch p genau zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen gehen.
b) Die zwei Hauptkrümmungen sind entgegensetzt gleich, d.h. sie sind $\pm\kappa \neq 0$, genau dann, wenn die Asymptotenrichtungen aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 27 – Flächen mit verschwindender mittlerer und Gausskrümmung (Bergner 04):

Auf $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gegeben, für welches zugleich $H \equiv 0$ und $K \equiv 0$ gelte. Zeigen Sie, dass f in einer Ebene enthalten ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Weingartenabbildung und somit die zweite Fundamentalform die Null-Matrix sind.
b) Folgern Sie, dass die Gaussabbildung $\nu(p)$ konstant ist und somit die Fläche in einer Ebene liegt.
c) Gilt obige Aussage auch im Falle von Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ falls $n \geq 3$?

Aufgabe 28 – Scherksche Minimalfläche (Bergner 04):

Laut (25) ist ein Graph $f(x, y) = (x, y, u(x, y))$ eine *Minimalfläche*, d.h. seine mittlere Krümmung ist null, falls die Differentialgleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

gilt. Wir wollen nun eine Minimalfläche der speziellen Form $u(x, y) = g(x) + h(y)$ finden. Diese wird *Scherksche Minimalfläche* genannt.

a) Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\frac{g''(x)}{1 + g'(x)^2} = a = -\frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2} \quad \text{für alle } x, y$$
gilt.
b) Lösen Sie nun diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$. Was ist der maximale Definitionsbereich der Lösung? (*Hinweis:* $\frac{d}{dt} \log \cos t = -\tan t$.)

Aufgabe 29 – Parallelflächen (Bergner 04):

Zu einer Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit Gauß-Abbildung ν erklären wir

$$f^s : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad f^s(x, y) := f(x, y) + s\nu(x, y).$$

als zugehörige Parallelfläche im Abstand s. Wir setzen voraus, dass s klein genug ist, so dass f^s Immersion ist, siehe Aufgabe 8. Dort hatten wir auch gezeigt: ν auch Gaussabbildung von f^s.

a) Sei die Fläche f nun in Krümmungslinienparametern parametrisiert, d.h. $\nu_x = \kappa_1 f_x$ und $\nu_y = \kappa_2 f_y$ mit den beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2. Zeigen Sie
$$f_x^s \times f_y^s = (1 + 2Hs + Ks^2) f_x \times f_y \ ,$$
wobei H die mittlere und K die Gausskrümmung von f seien.

b) Folgern Sie für den Flächeninhalt $A(f^s)$ der Parallelfläche die Entwicklung
$$A(f^s) = A(f) + 2s \int_U H\, dA + s^2 \int_U K\, dA$$
mit $dA := |f_x \times f_y| dxdy$ falls $|s| \le \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Aufgabe 30 – Zweite Fundamentalform einer impliziten Fläche (GB 05):

Wir führen Aufgabe 7 weiter. Sei also $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Flächenstück, das durch $\varphi \in C^2(V, \mathbb{R})$ implizit beschrieben wird, d.h. es gilt $M := \{f(x) : x \in U\} = \{p \in V : \varphi(p) = 0\}$ und insbesondere $\varphi \circ f = 0$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sogar $|\nabla\varphi(p)| = 1$ für alle $p \in M$ gilt. Man kann dies stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion (welcher?) erreichen. Dann ist $\tilde\nu := \nabla\varphi$ auf V definiert und $\nu := \tilde\nu \circ f$ die Gauß-Abbildung des Flächenstücks.

a) Berechnen Sie mit der Kettenregel als eine Vorübung $\partial_i \nu^l = \partial_i(\tilde\nu^l \circ f)$, d.h. die i-te Ableitung der l-ten Komponente der Normale; verwenden Sie am besten die Summenschreibweise.

b) Berechnen Sie nun die Koeffizienten b_{ij} der zweiten Fundamentalform in Summenschreibweise.

c) Drücken Sie b_{ij} nur durch die Hesseform von φ sowie f und die Standardbasis aus (keine Summenschreibweise). Bestimmen Sie $b(X,Y) = b\big(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big)$, indem Sie ebenfalls ohne Summen schreiben.

Aufgabe 31 – Variante der Weingarten-Abbildung (Reif 08):

Sei $P := G^{-1} df^{\mathrm{t}}$ die Pseudo-Inverse von df und $E := P^{\mathrm{t}} B P$ die *eingebettete Weingarten-Abbildung* der Hyperfläche $f := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Welche Dimensionen haben P und E? Zeigen Sie $E\nu = P\nu = 0$.

b) Verifizieren Sie die Gleichung $Edf = -d\nu$. So, wie S die Relation zwischen den *Zeilen* von df und $d\nu$ beschreibt, beschreibt also E die Relation zwischen den *Spalten* von df und $d\nu$.

c) Zeigen Sie: Aus $Sv = \kappa v$ und $w := df\, v$ folgt $Ew = \kappa w$.

d) Verifizieren Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil b) nochmals den aus der Vorlesung bekannten Satz, dass alle Eigenwerte von S reell sind und dass die Hauptkrümmungsrichtungen im Tangentialraum paarweise orthogonal gewählt werden können.

e) Bestimmen Sie E für die beiden hyperbolischen Paraboloide aus Aufgabe 18.

Index