VORLESUNGEN DIFFERENTIALGEOMETRIE (SS 02, 04, 06)

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Die klassische Kurven- und Flächentheorie ist das Thema folgender Bücher:

[B] Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter 01, 25 Euro, (Detailliert und gut lesbar. Das am besten zur Vorlesung passende Buch.)

[DC] Do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 83, engl.: Prentice Hall 76 (das klassische Standardwerk)

[EJ] J.-H. Eschenburg, J. Jost: Differentialgeometrie und Minimalflächen, 2. Aufl. Springer 2007 (detailliert, viele interessante Bemerkungen und Aufgaben, und natürlich ein schöner Schwerpunkt)

[MR] S. Montiel, A. Ros: Curves and surfaces, AMS 2005

[Kl] Klingenberg: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie / A course on differential geometry, Springer 1970 (kurz und bündig)

[Kü] Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 99 / Differential Geometry, American Mathematical Society 02

[O] Oprea: Differential Geometry and its applications, Prentice Hall 97 (In diesem Buch wird eine elementare Darstellung der Differentialgeometrie ergänzt durch Abschnitte über die Programmierung in Maple.)

Literatur zu Bézierkurven und -flächen

[F] Farin: Curves and surfaces for computer-aided geometric design, Academic Press 1988, 1997 (für Bézier-Kurven)

[HL] Hoschek, Lasser: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, Teubner 1992

Literatur zu weiteren speziellen Fragestellungen:

[H] Hopf: Differential Geometry in the Large, Springer Lecture Notes Nr. 1000; 1946/1989. (Ein wunderschöner Klassiker)

[HT] Hildebrandt, Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser 1996 (Ein populärwissenschaftliches Buch, das für Variations-Aspekte der Differentialgeometrie, beispielsweise Geodätische und Minimalflächen, eine schöne Einführung darstellt. Das Buch ist hübsch bebildert.)

[Sp] Spallek: Kurven und Karten, 2. Auflage, BI-Verlag 94 (enthält interessante Anwendungen der Kurventheorie: Zahnräder, Wankelmotor, Stabilität von Schiffen, etc.)

Einführung

Diese Vorlesung behandelt die klassische Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Sie wendet sich an Studenten der Mathematik und Physik ab dem 4. Semester. Ich habe sie in den Jahren 2002 (vierstündig) und dann 2004 und 2006 zweistündig in verschiedenen Variationen gehalten.

Als Einführung dient ein Kapitel über Kurventheorie. Ich habe versucht, sauber zu trennen zwischen parametrisierten Kurven einerseits und ihren Äquivalenzklassen unter Umparametrisierungen andererseits, also den Kurven schlechthin. Mit dem Jordanschen Kurvensatz für differenzierbare Kurven habe ich den vielleicht wichtigsten Satz über ebene Kurven behandelt.

Die Flächentheorie führe ich in beliebiger Dimension ein, d.h. ich betrachte Hyperflächen. Ich denke, dass viele Konzepte und auch die Notation in Dimension 2 etwas zu speziell sind, und daher vom Grundsätzlichen ablenken. Eine weitere Entscheidung für die Präsentation war es, stets parametrisch zu arbeiten.

Danach wird die Parallelverschiebung untersucht. Es folgt der schöne Satz von Bertrand-Puiseux. Den krönenden Abschluss bildet der Satz von Gauß-Bonnet. Dabei gebe ich nur zwei Versionen an: die für geodätische Dreiecke und die globale Form.

Die Übungsaufgaben aller Vorlesungen sind an die Kapitel angehängt. Darin enthalten sind zahlreiche Aufgaben, die Matthias Bergner 2004 entworfen hat sowie Aufgaben von U. Reif 2008. Ich danke für die vielen Vorschläge und Korrekturen von Studenten, die in das vorliegende Skript eingegangen sind.

Darmstadt, August 2008 Karsten Große-Brauckmann

Teil 1. Kurven

`1. Vorlesung, Montag 24.4.06`

Die klassische Differentialgeometrie befasst sich mit Kurven und Flächen. Diese Objekte sind meist durch eine Abbildung oder Parametrisierung gegeben, seltener implizit, d.h. als Nullstellenmenge von Funktionen. Man interessiert sich für Eigenschaften, die nur von der Gestalt der Kurven oder Flächen abhängen. Es geht also um diejenigen Eigenschaften, die unabhängig von Koordinaten und sogar unabhängig von den Parametern der speziellen Beschreibung sind.

Zuerst wollen wir im Falle von Kurven die geometrischen Begriffe Länge und Krümmung studieren. Um Kurven zu behandeln, genügt die Analysis einer Veränderlichen.

1. Kurven und ihre Bogenlänge

1.1. **Parametrisierungen.** Im folgenden steht I für beliebige Intervalle, also für zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition. (i) Eine *parametrisierte Kurve* ist eine glatte (beliebig oft differenzierbare) Abbildung $c\colon I \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Ihr Bild $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Spur*.
(ii) Die parametrisierte Kurve c heißt *reguläre Kurve*, wenn $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist.

In der Physik beschreibt eine parametrisierte Kurve c eine Bewegung: t ist Zeit, $c(t)$ ist bewegtes Objekt (Massenpunkt), der *Tangentialvektor* $c'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor. In der Physik sind Meist ist die Kurve als Lösung einer gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, z.B. die Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld.

Da wir auf die Regularität nicht genauer eingehen wollen, setzen wir stets Glattheit voraus, d.h. die verwendetetn Parametrisierungen sollen beliebig oft differenzierbar sein. In der Regel genügt jedoch C^3, manchmal auch C^1 oder C^2.

Beispiele ebener Kurven $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

1. Der *Kreis* ist die Spur der regulären Kurve $c(t) := (\cos t, \sin t)$.
2. Die Spur von $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ ist die *Figur acht* oder *Lemniskate*.
3. Die *Neilsche Parabel* $c(t) := (t^2, t^3)$ ist nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.
4. $c(t) := (t^3, t^3)$ hat als Spur die Diagonale von $\mathbb{R}^2$. Die Kurve ist jedoch nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

Definition. Eine *Parametertransformation* ist ein glatter Diffeomorphismus $\varphi\colon I \to \tilde{I}$ von Intervallen. Man nennt dann $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine *Umparametrisierung* von c. Ist $\varphi' > 0$, so nennt man die Umparametrisierung *orientierungserhaltend*.

Die Übereinstimmung regulärer Kurven nach Umparametrisierung definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der regulären Kurven (wieso?). Orientierungserhaltende Umparametrisierungen erhalten den Durchlaufsinn; sie induzieren eine speziellere Äquivalenzrelation.

Definition. (i) Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären Kurven unter der Relation Umparametrisierung. Wir schreiben für eine Klasse $\Gamma = [c]$.
(ii) Eine *orientierte Kurve* ist entsprechend eine Äquivalenzklasse regulärer Kurven, wobei orientierungserhaltende Umparametrisierungen als Äquivalenzrelation verwendet werden. Wir schreiben für eine Klasse $\langle c\rangle$.

Wenn c injektiv ist, so können wir die Kurve Γ mit ihrer Spur $c(I)$ identfizieren.

Beispiele. 1. Die mit verschiedenem Durchlaufsinn durchlaufenen Kreise $(\cos t, \sin t)$ und $(\cos t, -\sin t)$ stellen dieselbe Kurve, aber verschiedene orientierte Kurven dar.
2. Die Kreise $c_i(t) := (\cos t, \sin t)$ für $c_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $c_2\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ stellen verschiedene Kurven dar, denn die Anzahl der Urbilder ändert sich unter Umparametrisierung nicht.

Bemerkungen. 1. Im Allgemeinen identifiziert man eine Kurve mit einer ihrer Parametrisierungen.
2. Wir wollen explizit erwähnen, dass unsere Kurven Selbstschnitte haben können. Ein Beispiel ist die oben angegebene Lemniskate. Manchmal betrachtet man spezieller eingebettete (d.h. injektive) Kurven. Eingebettete Kurven sind 1-Mannigfaltigkeiten, deren Karten reguläre Kurven sind: die Bedingung $c'(t) \neq 0$ ist die Immersionsbedingung für eine Parametrisierung.

1.2. **Die Bogenlänge.** Als erste Eigenschaft von Kurven, die unabhängig vom Repräsentanten ist, führen wir ein:

Definition. Die *(Bogen-)Länge* einer Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L(c) = \int_I |c'(t)|\, dt \qquad \in [0, \infty]. \tag{1}$$

Bemerkungen. 1. Das Integral ist die kontinuierliche Version von: „zurückgelegter Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“.
2. Falls I kompakt ist, kann man das Riemann-Integral abschätzen und es gilt $L(c) < \infty$. Anderenfalls ist L uneigentliches Riemann-Integral oder Lebesgue-Integral und möglicherweise $L(c) = \infty$.

Bemerkung. Um die Beziehung zur Vorlesung Integrationstheorie herzustellen: Das 1-dimensionale Oberflächenmaß auf $\Gamma = [c]$ ist durch das Lebesgue-Integral $L(c) := \int_I \sqrt{\det g}\, dS$ gegeben. Hierbei ist der metrische Tensor die (1×1)-Matrix $g(t) := \langle c'(t), c'(t)\rangle = |c'(t)|^2$.

Wir wiederholen die Ihnen vielleicht schon aus der Analysis bekannte Rechnung, dass die Längenintegrale (1) von $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde c = c \circ \varphi\colon \tilde I \to \mathbb{R}^n$ übereinstimmen:

$$L(c) = \int_I \bigl|c'(s)\bigr|\, ds \overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\tilde I} \bigl|c'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\bigr|\, dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde I} \bigl|(c \circ \varphi)'(t)\bigr|\, dt = L(\tilde c)$$

Wir dürfen also auch $L = L(\Gamma)$ schreiben.

Beispiele. 1. Eine *Helix* oder *Schraubenlinie* mit Ganghöhe $2\pi h \in \mathbb{R}$ und Radius $r > 0$ wird durch

$$c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = \bigl(r \cos t, r \sin t, ht\bigr),$$

parametrisiert. Wegen $c'(t) = \bigl(-r \sin t, r \cos t, h\bigr)$ hat sie die Länge

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2}\, dt = (b - a)\sqrt{r^2 + h^2}\,.$$

2. Die *Ellipse* mit Halbachsen $a, b > 0$,

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = \bigl(a \cos t, b \sin t\bigr)$$

hat die Geschwindigkeit $|c'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Ihre Länge bzw. ihr Umfang

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

ist nicht elementar integrierbar (*elliptisches Integral*), es sei denn es ist $a = b$, wenn die Ellipse ein Kreis mit Umfang $L(c) = 2\pi a$ ist.

Auf die folgende Parameterdarstellung werden wir häufig zurückgreifen:

Satz 1. *Es sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung einer orientierte Kurve Γ der Länge $L := L(\Gamma) \in [0, \infty]$. Dann gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi\colon [0, L] \to [a, b]$, so dass der Repräsentant $\tilde c := c \circ \varphi\colon [0, L] \to \mathbb{R}^n$ von Γ* nach Bogenlänge parametrisiert ist*, d.h. es gilt* $|\tilde c'| = 1$.

Beispiel. Der Kreis vom Radius $r > 0$ wird durch $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})$ nach Bogenlänge parametrisiert, denn $|c'(t)| = \bigl|(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r})\bigr| = 1$.

Beweis. Wir betrachten die Länge der Kurve $c|_{[a,s]}$,

$$\ell\colon [a, b] \to [0, L], \qquad \ell(s) := \int_a^s |c'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Wegen c regulär gilt $\ell'(s) = |c'(s)| > 0$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\varphi := \ell^{-1}$ und φ ist ableitbar mit

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\ell'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|} > 0.$$

Daraus folgt wie gewünscht

$$\bigl|(c \circ \varphi)'(t)\bigr| = \bigl|c'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\bigr| = 1.$$

□

Bemerkung. Zwar ist der Satz einfach zu beweisen, aber dennoch lässt sich in der Praxis oft die Bogenlängen-Parametrisierung nicht explizit angeben, z.B. für Ellipsen.

`1. Vorlesung, Mittwoch 17.4.02`

1.3. **Zur Länge parametrisierter Kurven (nur 2002).** Wir wollen hier erläutern, welchen stetigen Kurven man noch eine Längenbegriff zuordnen kann. Unser Längenbegriff ist anschaulich und stimmt, wie wir zeigen werden, für differenzierbare Kurven mit dem Bogenlängenintegral überein.

Die klassische Idee zur Erklärung der Bogenlänge ist die Approximation durch Polygonzüge: Eine endliche Teilmenge von Punkten des Intervalls $[a,b]$ der Form $a =: t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k := b$ nennen wir eine *Zerlegung* Z des Intervalls $[a,b]$. Die Länge des Polygonzugs durch die Zerlegungspunkte schreiben wir als

$$L_Z(c) := \sum_{i=1}^{k} |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

Definition. Eine parametrisierte Kurve $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, wenn

$$\{L_Z(c) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \tag{2}$$

beschränkt ist. In diesem Fall heißt $L(c) := \sup L_Z(c)$ die *(Bogen-)Länge* von c.

Beispiele. 1. Die Kurve $c(t) := \left(t, t\cos\frac{1}{t}\right)$ für $t \in (0,1]$ und $c(0) := 0$ ist stetig, aber nicht rektifizierbar.
2. Bei *Peano-Kurven* ist sogar kein Teilstück rektifizierbar (siehe [Sa]).

Bemerkungen. 1. Es sei $a \le t < t' \le b$ und c rektifizierbar. Dann ist auch jedes Teilstück $c|_{[t,t']}$ rektifizierbar, denn $L(c) \ge |c(a) - c(t)| + L(c|_{[t,t']}) + |c(t') - c(b)|$.

2. Ist c rektifizierbar, so behaupten wir für jedes $t \in (a,b)$:

$$L(c) = \sup\{L_Z(c)\} \overset{!}{=} \sup\{L_{Z\cup\{t\}}(c)\} = L\big(c|_{[a,t]}\big) + L\big(c|_{[t,b]}\big)$$

In der Tat ist $Z \cup \{t\}$ eine spezielle Zerlegung, so dass "$\ge$" folgt. Andererseits ist auch "$\le$", denn durch Einfügen des Punktes t in Z wächst die Länge nach der Dreiecksungleichung: $L_Z(c) \le L_{Z\cup\{t\}}(c)$; diese Ungleichung überträgt sich auf das Supremum.

Unser anschaulicher Längenbegriff rechtfertigt das Bogenlängenintegral:

Satz 2. *Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist c rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\,dt. \tag{3}$$

Beweis. Wir verwenden die aus der Analysis bekannte "kontinuierliche Dreiecksungleichung" für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b \big|f(t)\big|\,dt. \tag{4}$$

Der Vollständigkeit halber folgt ihr Beweis. Es sei $I := \int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}^n$. Für $I = 0$ stimmt (4). Für $I \ne 0$ teilen wir die folgende Ungleichung durch $|I|$:

$$\begin{aligned}
|I|^2 = \left\langle I, \int_a^b f(t)\,dt \right\rangle &= I_1 \int_a^b f_1(t)\,dt + \ldots + I_n \int_a^b f_n(t)\,dt \\
&= \int_a^b \big(I_1 f_1(t) + \ldots + I_n f_n(t)\big)\,dt = \int_a^b \big\langle I, f(t)\big\rangle\,dt \\
&\overset{\text{Schwarz}}{\le} \int_a^b |I|\,|f(t)|\,dt = |I| \int_a^b |f(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Mit der kontinuierlichen Dreiecksungleichung erhalten wir für jede Zerlegung Z von $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
L_Z(c) &= \sum_{i=1}^{k} \big|c(t_i) - c(t_{i-1})\big| \overset{\text{komp.weise Hauptsatz}}{=} \sum_{k=1}^{k} \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)\,dt\right| \\
&\overset{(4)}{\le} \sum_{k=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|c'(t)\big|\,dt = \int_a^b \big|c'(t)\big|\,dt
\end{aligned} \tag{5}$$

Also ist c rektifizierbar.

Um (3) zu zeigen, definieren wir die Hilfsfunktion $\ell(t) := L(c|_{[a,t]})$; nach Bem. 2 ist $\ell(t)$ durch $L(c)$ beschränkt. Wir behaupten, dass $\ell(t)$ differenzierbar ist, und zwar eine Stammfunktion von $|c'(t)|$. Ist $t > t_0$, so gilt

$$|c(t) - c(t_0)| \le L\big(c_{[t_0,t]}\big) \overset{\text{sup von (5)}}{\le} \int_{t_0}^{t} |c'(s)|\,ds. \tag{6}$$

Nach Bemerkung 2. ist aber

$$L\big(c_{[t_0,t]}\big) = L\big(c_{[a,t]}\big) - L\big(c_{[a,t_0]}\big) = \ell(t) - \ell(t_0),$$

und daher folgt aus (6)

$$\left|\frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}\right| \le \frac{\ell(t) - \ell(t_0)}{t - t_0} \le \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} |c'(s)|\,ds. \tag{7}$$

Vertauscht man hierin die Rollen von t und t_0, so erhält man in jedem Ausdruck zwei Vorzeichenwechsel. Also gilt (7) sogar für alle $t \ne t_0$. Die äußeren Seiten von (7) gehen aber beide gegen $|c'(t_0)|$ für $t \to t_0$; daher existiert auch der Grenzwert des Differenzenquotienten von ℓ und wir haben die Behauptung $\ell'(t_0) = \left|c'(t_0)\right|$ gezeigt. Also gilt tatsächlich

$$\int_a^b |c'(t)|\,dt = \ell(b) - \underbrace{\ell(a)}_{=0} = L(c).$$

$\square$

2. Vorlesung, Montag 8.5.06

2. Krümmung von Kurven

Der Krümmungsbegriff für ebene Kurven soll folgenden *Postulaten* genügen:

1. Eine Gerade soll Krümmung 0 haben. Ein positiv durchlaufener Kreis vom Radius r soll die Krümmung $1/r$ haben, ein negative durchlaufener $-1/r$.
2. Eine allgemeine Kurve soll als Krümmung im Punkt $c(t)$ die Krümmung eines "best-approximierenden" Kreises haben.

Wenn dies so ist, dann ist das *Grundpostulat der Differentialgeometrie* erfüllt:

3. Differentialgeometrische Begriffe sind invariant unter Umparametrisierungen. Sie sind auch invariant unter Drehungen und Translationen des $\mathbb{R}^n$.

2.1. **Nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven.** Wir wollen zunächst die Normalenabbildung einer Kurve definieren, ohne Bogenlängenparametrisierung zu verlangen:

Definition. Es sei Γ eine orientierte ebene Kurve, die durch eine reguläre Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ repräsentiert sei. Ihre Normale $\nu\colon I \to \mathbb{R}^2$ wählen wir so, dass die Vektoren $\left(\frac{c'}{|c'|}, \nu\right)$ in jedem Punkt der Kurve eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden.

Die Normale erfüllt also $|\nu(t)| = 1$, $\langle \nu(t), c'(t)\rangle = 0$ und $\det(c', \nu) > 0$.

Um eine Formel für die Normale anzugeben, führen wir die orientierte 90-Grad-Drehung ein, also die lineare Abbildung

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dabei soll der Buchstabe J an die Multiplikation mit i erinnern; entsprechend gilt auch $J^2 = -E_2$. Wir erfüllen die Definition von ν, indem wir setzen

$$\nu = J \cdot \frac{c'}{|c'|}.$$

Wenn Γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\nu = Jc'$. Aus unserer Darstellung folgt, dass das Normalenfeld $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{S}^1$ einer orientierten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt ist und stetig ist.

Bei einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve gilt (einfache, aber wichtige Rechnung!):

$$\langle c'', c'\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\langle c', c'\rangle}_{\equiv 1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c'' \perp c' \quad \Leftrightarrow \quad c'' \parallel \nu$$

Weil c'' und ν linear abhänigig sind, können wir definieren:

Definition. Eine ebene orientierte Kurve Γ sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge $c\colon I \to \mathbb{R}^2$. Ihre *Krümmung* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$c'' = \kappa\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle \nu, c''\rangle = \langle Jc', c''\rangle. \tag{8}$$

Wir verstehen κ als *Kippgeschwindigkeit des Tangentenvektors*. Deutet man c als Bewegung eines Massepunktes mit Einheitsgeschwindigkeit, so ist c'' natürlich die Größe der Beschleunigung des Massenpunktes. Die Krümmung der Bahnkurve ist die Wirkung dieser Beschleunigung, bzw. der dazu proportionalen Kraft mc''. Wir prüfen Postulat 1 nach:

Beispiele. 1. Für die Gerade $c(t) = tv + b$ mit $v \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$, gilt $c'' \equiv 0$, also auch $\kappa \equiv 0$.

2. Es sei $r \neq 0$. Dann parametrisiert

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \left(r\cos\frac{t}{r},\, r\sin\frac{t}{r}\right).$$

einen Kreis vom Radius $|r|$ nach Bogenlänge. Das Vorzeichen von r unterscheidet die Orientierung: Für $r > 0$ mathematisch positiv, für $r < 0$ der Uhrzeigersinn (warum bevorzugen Mathematiker das erste?). Wegen

$$c'(t) = \left(-\sin\frac{t}{r},\, \cos\frac{t}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \nu = Jc'(t) = \left(-\cos\frac{t}{r},\, -\sin\frac{t}{r}\right) = -\frac{1}{r}c(t) \tag{9}$$

erhält der mathematisch durchlaufene Kreis die innere Normale, der im Uhrzeigersinn durchlaufene die äußere. Vergleichen wir nun

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r},\, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

mit (9), so finden wir $c'' = \frac{1}{r}\nu$, d.h.

$$\kappa \equiv \frac{1}{r}.$$

Insbesondere hat der mathematische Kreis positive Krümmung.

Bemerkung. Das Vorzeichen der Krümmung ist positiv in Linkskurven, negativ in Rechtskurven. Wenn wir die Orientierung wechseln, also statt c die Kurve $\tilde{c}(t) := c(b-t)$ betrachten, so wechselt die Krümmung ihr Vorzeichen.

Da die Normale die um 90 Grad rotierte Tangente ist, stimmen die Kippgeschwindigkeiten beider Vektoren überein und man kann die Krümmung genausogut durch die *Kippgeschwindigkeit der Normalen* charakterisieren:

Satz 3. *Eine ebene orientierte Kurve* Γ *sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *und habe die Normale* ν*. Dann gilt*

$$\nu' = -\kappa c', \tag{10}$$

bzw. das System von Differentialgleichungen für die Spaltenvektoren c, ν*,*

$$\big(c'', \nu'\big) = \big(c', \nu\big) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Beweis. Differenziation von $\nu = Jc'$ liefert

$$\nu' = (Jc')' = Jc'' = \kappa J\nu = \kappa J^2 c' = -\kappa c'.$$

□

Das autonome lineare System (11) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer ebenen Kurve. Wir werden dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen später für gegebenes κ explizit lösen.

2.2. **Reguläre ebene Kurven.** Viele Kurven lassen sich nicht explizit nach Bogenlänge parametrisieren. Daher benötigt man eine Formel für die Krümmung regulärer Kurven. Wir setzen nun Postulat 3, die Parametrisierungsinvarianz des Krümmungsbegriffs, ein.

Satz 4. *Die Krümmung* $\kappa(t)$ *einer ebenen orientierten Kurve* Γ*, gegeben durch eine reguläre Parametrisierung* c*, ist*

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{|c'|^3}\det(c', c''). \tag{12}$$

Beweis. Es sei $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge. Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi)\varphi', \qquad \tilde{c}'' = (c'' \circ \varphi){\varphi'}^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''. \tag{13}$$

Wegen $\langle Jc', c'\rangle = 0$ folgt gemäß Postulat 3

$$\kappa = \big\langle J\tilde{c}', \tilde{c}''\big\rangle = \big\langle Jc' \circ \varphi, c'' \circ \varphi\big\rangle {\varphi'}^3$$

Aber der Betrag von (13) liefert $1 = |\tilde{c}'|\varphi'$, so dass wir insgesamt den ersten Ausdruck von (12) erhalten.

Es bleibt noch die zweite Formel zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle Jv, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(v, w),$$

3. Vier Charakterisierungen der Krümmung

Wir geben nun einige Eigenschaften von Kurven an, für die die Krümmung wesentlich ist. Diese Eigenschaften sind lokal, d.h. durch die Kenntnis der Kurve in einer Umgebung eines Punktes bestimmt. Wir beschränken uns auf ebene Kurven.

3.1. **Graphen und lokale Normalform.** Der Graph einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (es reicht C^2) läßt sich als orientierte Kurve $c(t) := \big(t, f(t)\big)$ auffassen. Dieser Orientierung entspricht die Wahl der oberen Normalen ν mit $\nu_2 > 0$. Nach (12) hat c die Krümmung

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}}\left\langle \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}}.$$

Genau dann, wenn die Tangente horizontal ist, ist die Krümmung die zweite Ableitung:

$$f'(t_0) = 0 \iff \kappa(t_0) = f''(t_0) \tag{14}$$

Beispiele. 1. Die Parabel $c(t) := (t, t^2)$ hat in 0 horizontale Tangente, $f'(0) = 0$, und daher in 0 die Krümmung $(t^2)''|_{t=0} = 2$.
2. Der im Uhrzeigersinn parametrisierte Kreisbogen $c(t) := (t, \sqrt{1-t^2})$ hat in 0 die Krümmung $\big(\sqrt{1-t^2}\big)''|_{t=0} = \big(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\big)'|_{t=0} = -1$.

Umgekehrt wollen wir nun jede reguläre Kurve $c(t)$ als Graph über ihrer Tangentialrichtung schreiben; natürlich geht das nur lokal.

Satz 5. *Es sei* Γ *eine orientierte Kurve, repräsentiert durch* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$*. Im Punkt* $P = c(t_0)$ *habe* c *die Tangente* $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ *und die Normale* $N := JT$*. Sei ferner* κ *die Krümmung von* c *im Punkt* t_0*. Dann gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation* $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to I$ *mit* $\varphi(0) = t_0$*, so dass* $\tilde{c} := c \circ \varphi$ *die* lokale Normalform *besitzt*

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{15}$$

Überlegen Sie: Kann die Darstellung $\tilde{c}$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge sein?

Beweis. Setzen wir $s(\tau) := \big\langle c(\tau) - P, T\big\rangle$, so soll für die Parametertransformation φ gelten:

$$s(\varphi(t)) = \big\langle c(\varphi(t)) - P, T\big\rangle = \langle \tilde{c}(t) - P, T\rangle \overset{(15)}{=} t.$$

Wir erfüllen aber $s(\varphi(t)) = t$ und $\varphi(0) = t_0$ genau dann, wenn wir φ als lokale Umkehrfunktion $\varphi := s^{-1}$ wählen; tatsächlich existiert s^{-1} lokal, denn es gilt $s'(t_0) = \langle c'(t_0), T\rangle = |c'(t_0)| > 0$.

Setzen wir $f(t) := \langle \tilde{c}(t) - P, N \rangle$, so folgt

$$\tilde{c}(t) = P + tT + f(t)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{16}$$

Offenbar gilt für $t = 0$, dass $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = \langle c'(\varphi(0))\varphi'(0), N \rangle = \langle c'(t_0)\varphi'(0), N \rangle = 0.$$

Die Taylorreihe von f lautet also

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2}t^2 f''(0) + O(t^3) \overset{(14)}{=} \frac{1}{2}t^2\kappa + O(t^3).$$

Einsetzen in (16) ergibt (15). □

Wir können aus (15) beispielsweise ablesen:

Korollar 6 (Lokale Konvexität)**.** *Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so liegt die Kurve $\Gamma = [c]$ in einer Umgebung von $c(t_0)$ auf einer Seite des Tangentialraums $T_{c(t_0)}\Gamma$, d.h. für sämtliche t mit $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ gilt entweder $\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0) \rangle > 0$ oder < 0.*

Tatsächlich ist für eine eingebettete geschlossene Kurve sogar äquivalent: Das von der Kurve links berandete Gebiet ist konvex $\Leftrightarrow \kappa(t) \geq 0$ für alle t (siehe Übung 19).

Bemerkung. Für reguläre Raumkurven gibt es eine entsprechende Normalform. Setzt man $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ und $N := \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|}$, so findet man wie zuvor eine Umparametrisierung mit

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3); \tag{17}$$

allerdings steht $O(t^3) \in T^\perp \subset \mathbb{R}^n$ diesmal für einen Vektor.

3.2. **Krümmung als inverser Radius des Schmiegkreises.** Wir wollen das zu Beginn von Abschnitt 2 genannte Postulat 2 nachprüfen.

Aus Korollar 6 folgt:

Lemma 7. *Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Tripel $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ liegen die drei Punkte $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$ nicht auf einer Geraden.*

Beweis. Wegen der Stetigkeit von κ kann man ε so wählen, dass $\kappa \neq 0$ noch auf einem Intervall $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt. Von der Geraden g durch $c(t_2)$ und $c(t_1)$ liegt dann nur ein Strahl auf derjenigen Seite des Tangentialraums $T_{c(t_2)}$, die nach Kor. 6 die Kurve enthält. Also kann g den dritten Punkt $c(t_3)$ nicht treffen. □

`4. Vorlesung, Montag 22.5.06`

Unter den Voraussetzungen des Lemmas sei $K(t_1, t_2, t_3)$ der Kreis durch die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$; wir benötigen nur seinen Mittelpunkt $M(t_1, t_2, t_3)$. Wir wollen den am besten approximierenden Kreis nun als Grenzwert dieser Kreise definieren; dabei wollen wir sagen, dass eine Folge von Kreisen konvergiert, wenn Mittelpunkte und Radien konvergieren.

Satz 8. *Es sei c nach Bogenlänge parametrisiert und $c''(t_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert*

$$K(t_0) = \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} K(t_1, t_2, t_3),$$

der sogenannte Schmieg- *oder* Krümmungskreis *von c in t_0. Er hat den Mittelpunkt*

$$M(t_0) := \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} M(t_1, t_2, t_3) \;=\; c(t_0) + \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}.$$

und damit den Radius $\frac{1}{|c''(t_0)|} = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Beweis. Wir wählen ε wie im Lemma. Für $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $h(t) := \frac{1}{2}\big|c(t) - M(t_1, t_2, t_3)\big|^2$. Sie erfüllt $h(t_1) = h(t_2) = h(t_3)$, weil die drei Punkte $c(t_i)$ auf dem Kreis liegen. Daher liefert der Mittelwertsatz die Existenz von $\xi_1 \in (t_1, t_2)$ und $\xi_2 \in (t_2, t_3)$, so dass gilt

$$0 = h'(\xi_i) = \langle c'(\xi_i),\, c(\xi_i) - M(t_1, t_2, t_3) \rangle, \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes liefert ein $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, so dass

$$0 = h''(\eta) = \langle c''(\eta),\, c(\eta) - M(t_1, t_2, t_3) \rangle + \underbrace{|c'(\eta)|^2}_{=1}.$$

Im Grenzwert $t_1, t_2, t_3 \to t_0$ gehen auch ξ_i und η gegen t_0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben

$$\langle c'(t_0),\, c(t_0) - M(t_0) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle c''(t_0),\, c(t_0) - M(t_0) \rangle = -1.$$

Wegen $c'(t_0) \perp c''(t_0)$ folgt daraus wie gewünscht $c(t_0) - M(t_0) = -\frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}$; insbesondere existiert der Grenzwert $M(t_0)$ tatsächlich. □

Wir verzichten hier auf die Behandlung des Falles $c''(t_0) = 0$.

Bemerkung. Entsprechend kann man Raumkurven durch einen Krümmungskreis im Raum approximieren; man muss dann die Normalform (17) benutzen.

3.3. **Länge von Parallelkurven.** Ist $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve, so nennen wir die parametrisierte Kurve

$$c_d(t) := c(t) + d\nu(t)$$

eine *Parallelkurve* zu c im Abstand $d \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Ein positiv orientierter Kreis vom Radius r hat als Parallelkurven Kreise vom Radius $|r-d|$ (für $d=r$ ist dies ein Punkt).

Ist c' regulär, so hat nach (10) die Parallelkurve den Tangentenvektor

$$c_d' = c' + d\nu' = (1-d\kappa)c'. \tag{18}$$

Gilt also $1-d\kappa(t)\neq 0$ für alle $t\in I$, so ist auch c_d regulär.

Wir verlangen von nun an für t,d die stärkere Bedingung

$$1-d\kappa(t)>0. \tag{19}$$

Ist beispielsweise $|\kappa|\le K\neq 0$ (ein solches K existiert immer für I kompakt), so ist (19) erfüllt für $d\in(-\frac{1}{K},\frac{1}{K})$, denn $1-d\kappa(t)\ge 1-|d||\kappa(t)|\ge 1-|d|K>0$.

Aus (18) folgt $Jc_d' \parallel Jc'$; gilt zusätzlich (19), so zeigen beide Vektoren in die gleiche Richtung. Also folgt

$$\nu_d(t)=\nu(t) \qquad \text{für alle } t\in I$$

und die Normalen ändern sich beim Übergang zu jeder Parallelkurve c_d nicht. Weiterhin folgt aus (19), dass $|c_d'|=(1-d\kappa)|c'|$, was durch Integration ergibt:

Satz 9. *Ist $c\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert, und gilt (19) für alle $t\in I$ und $d\in\mathbb{R}$, so haben die Parallelkurven $c_d(t)=c(t)+d\nu(t)$ die Länge*

$$L(c_d)=L(c)-d\int_a^b \kappa(t)\,dt. \tag{20}$$

Die Funktion $d\mapsto L(c_d)$ ist also linear! Um die Krümmung zu messen, genügt es damit, das Längenelement von Parallelkurven zu bestimmen; genauer folgt aus (20) nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\kappa(t_0)=\frac{1}{d}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\Big(L(c(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon))-L(c_d(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon))\Big).$$

3.4. **Die Ableitung des Tangentenwinkels.** Wie kann man Winkel darstellen?

- Repräsentiert man sie eindeutig durch das Intervall $[0,2\pi)$, so sind sie unstetig.
- Wählt man sie stetig, so muss man sie als reelle Zahl auffassen, und sie sind nicht mehr eindeutig.

Weil wir Winkel noch differenzieren wollen, entscheiden wir uns für die zweite Variante:

Lemma 10. *Es sei $c\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert. Dann gibt es eine glatte Funktion $\vartheta\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, so dass*

$$c'(t)=\big(\cos\vartheta(t),\sin\vartheta(t)\big) \tag{21}$$

Jede andere solche Funktion unterscheidet sich von ϑ nur um Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π.

Entsprechendes gilt für jede andere $\mathbb{S}^1$-wertige Funktion an Stelle von c'. In der Topologie bezeichnet man ϑ als den *Lift* oder die *Hochhebung* der $\mathbb{S}^1$-wertigen Abbildung c' in die *Überlagerung* $\mathbb{R}$ von $\mathbb{S}^1$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines Liftes sukzessive in drei Fällen:
1. c' hat Werte im rechten Halbkreis $\mathbb{S}^1\cap\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1>0\}$.
2. c' hat Werte in einem festen Halbkreis $\mathbb{S}^1\cap\{x\in\mathbb{R}^2\mid\langle x,v\rangle>0\}$ für $v\neq 0$.
3. Allgemeiner Fall.

1. Ist $v\in\mathbb{S}^1$ ein Vektor mit $v_1>0$, so gilt:

$$v=(\cos\vartheta,\sin\vartheta) \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\vartheta=\frac{v_2}{v_1} \quad\Longleftrightarrow\quad \exists n\in\mathbb{Z}:\vartheta=\arctan\frac{v_2}{v_1}+2\pi n.$$

Für die zweite Äquivalenz muss man beachten, dass tan die Periode π hat; allerdings gilt $v_1=\cos\vartheta>0 \Leftrightarrow \vartheta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+2\pi\mathbb{Z}$.

Wir können also setzen

$$\vartheta(t):=\arctan\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)}+2\pi n(t) \tag{22}$$

mit $n\in\mathbb{Z}$. Es gilt aber: ϑ stetig $\Leftrightarrow$ n konstant; für c' glatt ist nach (22) dann auch ϑ glatt.

2. Nach Drehung um einen Winkel $-\varphi$ liegt das Bild von c' im rechten Halbkreis. Man wendet darauf (22) an, und addiert zu ϑ dann φ.

3. Die Funktion $c'\colon[a,b]\to\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ ist gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon=\sqrt{2}$ gibt es daher ein $\delta>0$, so dass aus $|s-t|<\delta$ folgt $\big|c'(s)-c'(t)\big|<\sqrt{2}$. Also liegt das Bild jedes Intervalls $(t-\delta,t+\delta)$ in einem Halbkreis. Wir zerlegen nun $[a,b]$ in endlich viele Intervalle der Form $I_k:=\big(a+(k-1)\delta,\,a+(k+1)\delta\big)\cap[a,b]$ mit $k=0,\dots,k_0$. Wir wollen Induktion benutzen. Auf I_0 liefert Schritt 2 einen Lift; dabei ist $n\in\mathbb{Z}$ frei wählbar. Hat man auf I_k schon einen Lift gewählt, so ist durch Schritt 2 eine eindeutige stetige Fortsetzung nach I_{k+1} bestimmt (sogar glatt für c' glatt). □

Aus (21) folgt $c''=\vartheta'\big(-\sin\vartheta,\cos\vartheta\big)=\vartheta'\nu$. Durch Vergleich mit (8) erhalten wir

$$\kappa=\vartheta' \tag{23}$$

als eine Charakterisierung der Krümmung: Die Krümmung ist die Rotationsgeschwindigkeit des Tangentenvektors.

Wir wollen die Gleichung nun zweimal aufintegrieren, wobei wir annehmen, dass c auf $[a,b]$ definiert ist: Erstens ist

$$\vartheta(s)=\vartheta(a)+\int_a^s\kappa(\sigma)\,d\sigma$$

und zweitens

$$c(t)-c(a)=\int_a^t c'(s)\,ds=\int_a^t \begin{pmatrix}\cos\vartheta(s)\\ \sin\vartheta(s)\end{pmatrix} ds=\begin{pmatrix}\int_a^t \cos\big(\vartheta(a)+\int_a^s\kappa(\sigma)\,d\sigma\big)\,ds\\ \int_a^t \sin\big(\vartheta(a)+\int_a^s\kappa(\sigma)\,d\sigma\big)\,ds\end{pmatrix}.$$

Dies ist die explizite Lösung des Differentialgleichungssystems (11):

Satz 11 (Hauptsatz für ebene Kurven)**.** *Es seien $\kappa\colon I\to\mathbb{R}$ glatt (bzw. stetig), $p\in\mathbb{R}^2$, $v\in\mathbb{S}^1$, und $t_0\in I$. Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene glatte (bzw. C^2-)Kurve $c\colon I\to\mathbb{R}^2$, die in t die Krümmung $\kappa(t)$ hat, sowie die Anfangswerte $c(t_0)=p$, $c'(t_0)=v$.*

Es folgt: Gerade und Kreise sind die einzigen ebenen Kurven konstanter Krümmung.

Bemerkungen. 1. Für Raumkurven gibt es ebenfalls einen Hauptsatz, d.h. zu vorgegebener Krümmung und Torsion gibt es eine Kurve in $\mathbb{R}^3$; sie ist eindeutig bestimmt bis auf Bewegungen (oder durch entsprechende Anfangsbedingungen). Also sind beispielsweise Helices die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion. Weil man keinen Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mehr zur Verfügung hat, mit einem abstrakten Satz lösen: Das Problem wird auf den Satz von Picard-Lindelöf zurückgeführt (siehe [B], S.70ff).

2. (vgle. Spallek [Sp] S. 57/58]) Straßenkurven werden mit κ stückweise linear in t trassiert, damit beim Autofahren der Lenkradeinschlag zu einer stetigen Funktion der Zeit wird. Nach Satz 11 existieren Kurven c mit κ linear; sie heissen *Klothoiden* oder Straßenbauer-Spiralen und sind nicht elementar integrierbar (siehe Aufgabe 15). Sie werden so aneinander gesetzt, dass die entstehende Kurve, also die Straße, der Klasse C^2 angehört. Bis 1937 wurden Straßen offenbar nur als C^1-Kurven trassiert. Im Eisenbahnbau hat man bereits länger C^2-Kurven verwendet, jedoch arbeitet man mit Stücken kubischer Parabeln. Im allgemeinen muss man mit Raumkurven arbeiten.

`6. Vorlesung, Montag 12.6.06`

3.5. **Ausblick: Globale Eigenschaften ebener Kurven.** Die Krümmung ist eine lokale Eigenschaft einer orientierten Kurve: Es reicht, die Kurve in der Umgebung eines Punktes zu kennen, um sie für diesen Punkt zu berechnen. Auch die Bogenlänge kann man auf Teilstücken berechnen, ohne dass der Rest der Kurve das Ergebnis beeinflusst.

Globale Aussagen sind dagegen Aussagen, die die Kenntnis der ganzen Kurve voraussetzen. Wir geben einige Aussagen für *geschlossene* reguläre ebene Kurven an, also Abbildungen $c\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ mit $c(a)=c(b)$, $c'(a)=c'(b)$, $c''(a)=c''(b)$. Die Kurve c heisst *einfach* oder eingebettet, wenn $c|_{[a,b)}$ injektiv ist. Wir geben einige Beispiele solcher Aussagen an, auch wenn wir sie in dieser Vorlesung nicht näher behandeln können (man findet Beweise z.B. in Bär [B]).

Vierscheitelsatz:
Eine einfach geschlossene ebene Kurve hat mindestens vier Punkte, in denen die Krümmung kritisch ist (dass sie zwei hat, ist klar – warum?).

Jordanscher Kurvensatz:
Jede einfach geschlossene ebene Kurve zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei Zusammenhangskomponenten, davon eine kompakt (das *Innengebiet*) die andere nicht kompakt. Der Satz gilt sogar für C^0-Kurven.

Isoperimetrische Ungleichung:
Unter allen einfach geschlossenen ebenen Kurven ist der Einheitskreis diejenige Kurve, die ein Gebiet des Flächeninhalts π mit kürzester Länge berandet.

`5. Vorlesung, Donnerstag 2.5.02`

3.6. **Die Umlaufzahl einfacher Kurven (nur 2002).**

Satz 12 (Hopfscher Umlaufsatz, 1935)**.** *Eine einfache geschlossene Kurve c hat Umlaufzahl $n_c\in\{\pm1\}$.*

Lemma 13 (Liftung)**.** *Für $A\subset\mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig sei $\gamma\colon A\to\mathbb{S}^1$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta\colon A\to\mathbb{R}$ mit*

$$\gamma(p)=\big(\cos\vartheta(p),\sin\vartheta(p)\big). \tag{24}$$

Je zwei solche Funktionen haben als Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π.

Bemerkung. Das Lemma gilt allgemeiner für Gebiete ohne Loch, sogenannte *einfach zusammenhängende* Gebiete (Aufgabe **??**).

Gegenbeispiel. Auf dem Kreisring $\{x\in\mathbb{R}^2\mid \frac12<|x|<1\}$ (mit Loch) ist $\gamma(x):=\frac{x}{|x|}$ eine Funktion, die wir nicht wie in (24) liften können.

Beweis. OBdA sei A sternförmig bezüglich 0. Wir legen $\vartheta(0)$ willkürlich fest, so dass (24) gilt; dies entspricht der Wahl einer Zahl $k\in\mathbb{Z}$ wie in (22). Nun legen wir ϑ auf ganz A dadurch fest, dass ϑ auf jedem Strahl durch 0 eine stetige Funktion sein soll, die (24) genügt. Eine solche Funktion existiert laut Lemma 13.

Es bleibt die Stetigkeit auf A zu zeigen. Da γ auf dem Kompaktum A gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta>0$, so daß $\gamma\big(B_\delta(p)\big)\subset\text{Halbkreis}\big(\gamma(p)\big):=\{q\in\mathbb{S}^1\mid\langle q,\gamma(p)\rangle>0\}$, und zwar unabhängig von $p\in A$.

Es sei nun $x\in A$ und $y\in B_\delta(x)$. Die Hilfsfunktion $h(s):=\vartheta(sx)-\vartheta(sy)$ ist wegen der Sternförmigkeit von A für $s\in[0,1]$ definiert und nach Wahl von ϑ stetig. Wir behaupten $h(s)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Nach Wahl von ϑ gilt $h(0)=0$. Nehmen wir an, es gibt ein s mit $|h(s)|\ge\frac{\pi}{2}$.

Wegen der Stetigkeit von h existiert dann ein $s_0 \in [0,1]$ mit $|h(s_0)| = \frac{\pi}{2}$ (Zwischenwertsatz). Aber einerseits ist $|s_0 x - s_0 y| = s_0|x-y| < \delta$, d.h. der Punkt $s_0 y$ liegt im δ-Ball um $s_0 x$. Andererseits liegt $\gamma(s_0 y)$ nicht im Halbkreis um $\gamma(s_0 x)$. Widerspruch.

Auf jedem Ball B_δ nimmt ϑ also Werte in einem Halbkreis an und erfüllt dort (24). Aber auf einem Halbkreis ist (24) umkehrbar. Daher ist ϑ stetig. □

Beweis des Umlaufsatzes. Wir schreiben die geschlossene Kurve als $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Es gibt stets einen Punkt $c(t_0)$ auf der Kurve, so dass der Tangentenstrahl $\{c(t_0) + sc'(t_0) \mid s > 0\}$ die Kurve nicht schneidet; tatsächlich enthält jede Gerade, die tangential an die konvexe Hülle der Kurve ist, einen solchen Punkt. Wir wählen nun als Markierungspunkt $t_0 = 0$, verschieben die Kurve, so dass $c(0) = 0$, und drehen sie schließlich, so dass $\frac{c'(0)}{|c'(0)|} = (1,0)$; dies ändert die Umlaufzahl nicht. In dieser Lage schneidet c die positive x-Achse nicht.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Entweder ist für kleine $t > 0$ die zweite Komponente von $c(t)$ positiv oder negativ. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

Sei $A := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s \le t \le 1\}$ (`Bild`). Dass c einfach ist, bedeutet $c(s) \ne c(t)$ für $s \ne t$, abgesehen von $(s,t) = (0,1)$. Da c regulär ist, ist $c' \ne 0$. Also definiert die Sekanten- bzw. Tangentenrichtung eine Funktion $\gamma\colon A \to \mathbb{S}^1$:

$$\gamma(s,t) := \begin{cases} \frac{c(t)-c(s)}{|c(t)-c(s)|} & \text{für } s < t \text{ und } (s,t) \ne (0,1), \\ \frac{c'(t)}{|c'(t)|} & \text{für } s = t, \\ -\frac{c'(0)}{|c'(0)|} & \text{für } s = 0 \text{ und } t = 1. \end{cases}$$

Nach Definition von c' ist γ stetig auf A. Nach dem Liftungslemma gibt es einen stetigen Winkel $\vartheta\colon A \to \mathbb{R}$ der Sekanten-/Tangentenrichtung γ. Auf der Diagonalen ist $t \mapsto \vartheta(t,t)$ der Tangentenwinkel von c. Daher ist $n_c = \frac{1}{2\pi}\big(\vartheta(1,1) - \vartheta(0,0)\big)$ die Umlaufzahl.

Wir wollen nun n_c berechnen, indem wir $\vartheta(s,t)$ längs der beiden achsenparallelen Randkurven von A verfolgen, d.h. längs der Kurven $t \mapsto \vartheta(0,t)$ und $s \mapsto \vartheta(s,1)$. Wir führen also erst den einen Sekantenpunkt $c(t)$ einmal um die Kurve herum, dann den anderen $c(s)$. Wir können festlegen $\vartheta(0,0) = 0$. Im ersten Fall behaupten wir, dass $n_c = 1$ gilt; wir müssen also $\vartheta(1,1) = 2\pi$ beweisen.

Nun ist $\vartheta(0,t)$ gerade der (stetige) Winkel des Vektors $c(t)$ mit der x-Achse. Da c die positive x-Achse nicht mehr schneidet, ist einerseits $\vartheta(0,t) \ne 0 \bmod 2\pi$. Andererseits ist (im ersten Fall) $\vartheta(0,t)$ positiv für kleine t. Also liegt $\vartheta(0,t)$ im Interval $(0, 2\pi)$ für $t \ne 0$, und wegen $\vartheta(0,1) = \pi \bmod 2\pi$ muss gelten $\vartheta(0,1) = \pi$.

Die Funktion $\vartheta(s,1)$ beschreibt den Winkel von $-c(s)$ mit der x-Achse; für sie können wir genauso argumentieren: Einerseits ist $\vartheta(s,1) \ne \pi \bmod 2\pi$ für $s \ne 0$. Andererseits ist $\vartheta(s,1)$

größer als π für kleine s. Daher gilt $\vartheta(s,1) \in (\pi, 3\pi)$, und wegen $\vartheta(1,1) = 0 \bmod 2\pi$ folgt wie gewünscht $\vartheta(1,1) = 2\pi$.

Im zweiten Fall erhält man als ϑ-Intervalle $(-2\pi, 0)$ und $(-3\pi, -\pi)$, so dass man analog $\vartheta(1,1) = -2\pi$, also $n_c = -1$, zeigen kann. □

3.7. **Die Windungszahl und Funktionentheorie (nur 2004).** Wir fragen: Wie oft läuft eine geschlossene orientierte Kurve $\Gamma = \big[c\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2\big]$ um einen Punkt $p \notin \Gamma$?

Wir stellen zuerst fest, dass wir das Liftungslemma 10 nicht nur auf die Kurve der Tangentialvektoren $c' \in \mathbb{S}^1$ anwenden können: Es liefert sogar für jede stetige Kurve nach $\mathbb{S}^1$ einen Lift ϑ. Wir wollen das Lemma speziell auf die Radialprojektion $c - p$ anwenden, also auf die von $p \in \mathbb{R}^2 \setminus c\big([0,T]\big)$ abhängige Kurve

$$\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{S}^1, \quad \gamma(t) := \frac{c(t)-p}{|c(t)-p|}$$

Für jedes p liefert das Liftungslemma eine glatte Funktion ϑ mit $\gamma(t) = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big)$. Als Antwort auf unsere Frage erhalten wir:

Definition. Die Zahl

$$n(c,p) := \frac{1}{2\pi}\big(\vartheta(T) - \vartheta(0)\big) \in \mathbb{Z} \qquad \text{für } p \in \mathbb{R}^2 \setminus c\big([0,T]\big),$$

heißt *Windungszahl von c um p*. Da die Windungszahl invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen ist schreiben wir auch $n(\Gamma, p)$.

Wir können nun eine Aussage beweisen, die in der Funktionentheorie aus Bequemlichkeitsgründen meist eine Definition darstellt:

Lemma 14. *Sei $\Gamma = \big[c\colon [0,T] \to \mathbb{C}\big]$ eine orientierte ebene geschlossene Kurve (glatt oder C^1). Ihre Windungszahl kann man als (komplexes) Kurvenintegral schreiben:*

(25) $$n(c,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-p} \qquad p \notin \Gamma$$

Beweis. Der glatte Lift ϑ von γ gestattet es, Polarkoordinaten um p einzuführen:

$$c(t) - p = r(t)e^{i\vartheta(t)}$$

Dabei ist $r(t) := |c(t) - p| > 0$; insbesondere gilt $r(0) = r(T)$. Der Rest ist Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{dz}{z-p} &\overset{\text{Def.}}{=} \int_0^T \frac{c'(t)}{c(t)-p}\,dt = \int_0^T \frac{r'e^{i\vartheta} + ir\vartheta' e^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}}\,dt = \int_0^T \frac{r'}{r} + i\vartheta'\,dt \\ &= \big[\log r + i\vartheta\big]_0^T = i\big(\vartheta(T) - \vartheta(0)\big) = 2\pi i\, n(c,p) \end{aligned}$$

□

3.8. **Der Jordansche Kurvensatz für differenzierbare Kurven (nur 2004).** Wir befassen uns hier mit der vielleicht wichtigsten Aussage über folgenden Typ von Kurven.

Definition. Eine *Jordan-Kurve* ist eine injektive stetige Abbildung $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(a) = c(b)$. Man sagt auch, c ist eine *einfache geschlossene (stetige) Kurve.*

Beispiele. 1. Den Rand eines Dreiecks kann man als Jordan-Kurve auffassen.
2. Der zweimal durchlaufene Kreis $\mathbb{S}^1 \ni e^{it} \mapsto e^{2it}$ ist keine Jordan-Kurve.
3. Eine konstante Kurve ist keine Jordan-Kurve.

Wegen der Injektivität ist es üblich, eine Jordan-Kurve mit ihrer Spur identifizieren, $\Gamma = c\big([a,b]\big)$. Wir wollen nun $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ untersuchen.

Satz 15 (Jordanscher Kurvensatz, Jordan 1892 (Vermutung), Veblen 1905 (Beweis))**.** *Eine Jordan-Kurve* Γ *zerlegt* $\mathbb{R}^2$ *in zwei offene und nicht leere Zusammenhangskomponenten,d.h.* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = V_1 \dot\cup V_2$. *Weiterhin gilt: Jede Menge* V_i *hat den Rand* Γ*, also* $\overline{V}_1 \setminus V_1 = \overline{V}_2 \setminus V_2 = \Gamma$*, und der Abschluss von genau einer Komponente, z.B. von* V_1*, ist kompakt (*V_1 *heisst dann* Innengebiet *von* Γ*).*

Wir erläutern zunächst den Satz. Die Abbildung c ist stetig und $[a,b]$ ist kompakt. Also ist auch $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Es folgt, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ eine offene Menge ist. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ (oder X metrischer Raum) und $x, y \in X$, so bildet

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists \text{ stetige Kurve in } X \text{ von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation, deren Klassen die *((Weg-)Zusammenhangs-)Komponenten* von X heißen.

Beispiel. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ hat zwei Komponenten, $\{|x| < 1\}$ und $\{|x| > 1\}$. Warum gibt es tatsächlich keine stetige Kurve von $(0,0)$ nach $(0,2)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$?

`6. Vorlesung, Montag 17.5.04` ______________________

Bemerkung. Peano-Kurven sind stetige surjektive Kurven $[0,1] \to [0,1]^2$, also geschlossene Kurven ohne Innengebiet. Der Jordansche Kurvensatz sagt, dass solche Beispiele nicht injektiv sein können. Es ist allerdings möglich, dass eine Jordan-Kurve Γ positives Lebesgue-Maß hat, $\lambda_2(\Gamma) > 0$! Lesen Sie hierzu die Einführung zu Kapitel 8 in Sagan [S].

In der angegebenen Allgemeinheit erfordert der Beweis des Kurvensatzes Mittel aus der Topologie. Sie finden ihn in z.B. in Munkres, Topology (2nd ed. 2000, S.390ff). Wir behandeln hier nur den einfachen Spezialfall, dass c eine glatte reguläre Kurve ist (C^1 reicht).

Zum Beweis zerlegen wir das Komplement der Kurve in Komponenten,

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Die $V_i \neq \emptyset$ sind paarweise disjunkte Mengen, die offen sind (warum?). Wir zeigen den Kurvensatz für C^1-Jordan-Kurven durch zwei Lemmata.

Lemma 16. *Ist die Jordankurve* $c \in C^1$ *regulär, so gilt* $|I| \le 2$*, d.h.* Γ *zerlegt* $\mathbb{R}^2$ *in höchstens zwei Komponenten.*

Beweis. Die einzige nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die keine Randpunkte besitzt, ist $\mathbb{R}^2$. Wegen $\Gamma \neq \emptyset$ gilt natürlich $V_i \neq \mathbb{R}^2$ und deshalb besitzt jedes V_i Randpunkte. Diese Randpunkte müssen in der abgeschlossenen Menge Γ liegen.

Wir parametrisieren die reguläre Kurve Γ nach Bogenlänge, $c\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$. Wir betrachten nun Parallelkurven von c als eine Abbildung von zwei Variablen,

$$F(t,d) := c_d(t) = c(t) + d\nu(t)\colon [0,L] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2.$$

Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt: Die beiden Mengen

$$X := F\big([0,L] \times (-\varepsilon, 0)\big) \quad \text{und} \quad Y := F\big([0,L] \times (0, \varepsilon)\big)$$

sind disjunkt zu Γ. Weil sie selbst zusammenhängend sind, müssen sie dann jeweils in einer Komponente enthalten sein. Andererseits ist offenbar die abgeschlossene Menge Γ eine Teilmenge der offenen Menge $F\big([0,L] \times (-\varepsilon, \varepsilon)\big)$. Also kann es höchstens zwei Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ geben, was gerade die zu beweisende Aussage ist.

Wir beweisen nun die Behauptung. Zuerst behandeln wir die lokale Frage: (i) Trifft ein kurzer normaler Strahl die Kurve in einer kleinen Umgebung des Fußpunkts? Danach behandeln wir das globale Problem: (ii) Trifft der Strahl den Rest der Kurve?

(i) Weil c' gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass für $|t-s| \le \delta$ gilt $|c'(t) - c'(s)| \le \frac{1}{2}$. Für jedes solche Paar s, t betrachten wir nun die Punkte $c(t)$ und $c_d(s)$. Wir zeigen zuerst, dass ihr Abstand wenigstens $\frac{|t-s|}{2}$ ist. Dazu betrachten wir die Abstände zu einem Hilfspunkt $p := c(s) + c'(s)(t-s)$. Es gilt einerseits

$$|c(t) - p| = \Big|\big(c(t) - c(s)\big) - c'(s)(t-s)\Big| = \Big|\int_s^t c'(\tau) - c'(s)\, d\tau\Big| \le \frac{|t-s|}{2},$$

und andererseits (Pythagoras)

$$|p - c_d(s)| = \Big|\big(c(s) + c'(s)(t-s)\big) - c_d(s)\Big| = \sqrt{(t-s)^2 + d^2} \ge |t-s|.$$

Also ist tatsächlich $|c(t) - c_d(s)| \ge |p - c_d(s)| - |c(t) - p| \ge \frac{|t-s|}{2}$. Dies zeigt, dass der ganze Strahl $d \mapsto c_d(s)$ die Kurve c in der δ-Umgebung von s nicht trifft.

(ii) Um den "Rest" der Kurve zu behandeln, betrachten wir nun die abgeschlossene Menge $M(t) := c\big([0,L] \setminus (t-\delta, t+\delta)\big)$ (oBdA liegt das herausgenommene Intervall in $[0,L]$). Die Funktion

$$f\colon [0,L] \to [0,\infty), \qquad t \mapsto \operatorname{dist}\big(c(t), M(t)\big)$$

ist stetig. (Man muß hierzu erklären, wann eine Mengenfunktion $t \mapsto M(t)$ stetig heißt; wir lassen die Details aus.)

Die Einbettung von c ergibt $f > 0$. Weil f auf einem Kompaktum definiert ist, nimmt f ein positives Minimum $2\varepsilon > 0$ an. Also hat der Strahl $d \mapsto c_d(s)$ für $0 < |d| < \varepsilon$ mindestens Abstand ε zur Restkurve M, d.h. er trifft M nicht. □

Wir kommen nun zum zweiten Lemma:

Lemma 17 (Jordanscher Trennungssatz)**.** *Ist die Jordankurve $c \in C^1$ regulär, so gilt $|I| \geq 2$, d.h. Γ zerlegt $\mathbb{R}^2$ in mindestens zwei Komponenten.*

In Munkres [M], §61 finden Sie den Beweis für C^0-Kurven. Im C^1-Fall gibt es auch noch einen schönen Beweis durch den Greenschen Integralsatz in der Ebene, siehe Munkres [M], Exercise 2, S.406. Auch in diesem Beweis wollen wir der Kürze wegen ein Detail nur skizzieren.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass X und Y zu zwei verschiedenen Komponenten gehören. Dazu reicht es, eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ anzugeben, die
(i) auf jeder Komponente konstant ist, aber
(ii) auf X und Y verschiedene Werte annimmt.
Wir behaupten die Windungszahl $p \mapsto n(\Gamma, p)$ erfüllt dies.

Zunächst zeigen wir (i) d.h. $p \mapsto n(c,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\vartheta(b) - \vartheta(a)\big)$ ist konstant auf jeder Komponente V_i. Aus dem Beweis des Liftungslemmas sieht man, dass die Radialprojektion von c bezüglich p stetig von p abhängt; also tut dies auch der Lift ϑ. Also ist $p \mapsto n(c,p)$ stetig. Andererseits ist $n(c,p) \in \mathbb{Z}$. Wir behaupten, dass $n(c,.)$ auf V_i konstant ist. Wählen wir nun ein Punktepaar $x, y \in V_i$, so gibt es einen stetigen Weg $\gamma(t)$ von x nach y, also ist auch $t \mapsto n\big(c, \gamma(t)\big) \in \mathbb{Z}$ stetig, also konstant. (Wer es kennt: Wir haben hier die allgemeine Tatsache benutzt „wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend“).

Um (ii) zu zeigen, behaupten wir zuerst: Auf dem Außengebiet V_2 ist $n(c,p) \equiv 0$. Tatsächlich liest man dies direkt aus dem Beweis des Liftungslemmas 10 ab: Wählt man einen Halbraum, der die Kurve Γ enthält, so nimmt für jedes p außerhalb dieses Halbraums der Winkel ϑ nur Werte in einem π-Intervall an, und wird wie in (22) gegeben. Also stimmt er für eine geschlossene Kurve in a und b überein.

Andererseits behaupten wir dass auf dem Innengebiet V_1 gilt $n(c,p) = \pm 1$.

Wir wählen einen Punkt $t_0 \in [a,b]$, oBdA. ist $t_0 \in (a,b)$. Um die Situation zu vereinfachen, betrachten wir zuerst den Spezialfall, dass c in einer Umgebung von t_0 eine Strecke in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert; die Umgebung sei durch $a \leq t_- < t_0 < t_+ \leq b$ gegeben. Wir nennen dies Geradenstück $g(t) := c|_{[t_-,t_+]}$.

Wir betrachten nun Punkte $p_d := c(t_0) + d\nu(t_0)$, wobei $d \neq 0$ klein genug sei, so dass $p_d \notin \Gamma$. Wir ermitteln nun die Winkeldifferenz von g bezüglich der Punkte p_d,

$$d \mapsto n(g, p_d) = \frac{1}{2\pi}\big(\vartheta_d(t_+) - \vartheta_d(t_-)\big).$$

Die Definition von ϑ als Winkel der Radialprojektion von $t \mapsto p_d - c(t)$ zeigt: Für $d \to 0$ geht $\big|\vartheta_d(t_+) - \vartheta_d(t_-)\big| \to \pi$. Der Grenzwert ohne Beträge hängt jedoch vom Vorzeichen von d ab: die Normale dreht in $\mathbb{S}^1$ „unten“ oder „oben“ herum; einer der Grenzwerte ist π, der andere $-\pi$. (Analogie: Ihre Kopfdrehung, wenn Sie einem vorbeifahrenden Auto auf einer Straße folgen, wobei Sie auf der einen oder anderen Seite der Straße stehen). Daraus folgt

$$\big|\lim_{d \searrow 0} n(g, p_d) - n(g, p_{-d})\big| = 1.$$

Die Windungszahl springt also um 1, wenn p_d die Kurve Γ überquert. Da auf dem Außengebiet die Windungszahl 0 ist, muss sie im Innengebiet also ± 1 sein (je nach Durchlaufsinn).

Von der speziellen Annahme, dass $c\big([t_-, t_+]\big)$ ein Geradenstück ist, kann man sich schnell befreien: Nach der Normalform (15) einer regulären differenzierbaren Kurve weicht c lokal beliebig wenig von einer Strecke ab. Man erhält daher die obigen Formeln mit einem Fehler, der für $t_\pm \to 0$ gegen 0 geht. Wir lassen die Details aus. □

`6. Vorlesung, Mittwoch 8.5.02` ______________________________

4. FRENET-THEORIE FÜR KURVEN IN $\mathbb{R}^n$ (NUR 2002)

4.1. Frenet-Kurven.

Definition. Eine Kurve $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Frenet-Kurve*, wenn die Vektoren $c'(t)$, $c''(t)$, $\ldots$, $c^{(n-1)}(t)$ für alle $t \in [a,b]$ linear unabhängig sind.

Beispiele. 1. In $\mathbb{R}^2$ ist eine reguläre ebene Kurve immer Frenet-Kurve.
2. In $\mathbb{R}^3$ ist eine Gerade keine Frenet-Kurve, aber ein Kreis ist es.

Wir wollen uns auf Frenet-Kurven beschränken, wenn wir gleich Krümmungen definieren. Der Rahmen c', n, b wird verallgemeinert durch:

Lemma 18. *Eine Frenet-Kurve c bestimmt eindeutig n glatte Vektorfelder $e_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, den sogenannten* begleitenden Frenet-Rahmen *(oder das* Frenet n-Bein*), mit:*
(i) *Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ bilden für jedes $t \in [a,b]$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, also $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j und $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.*
(ii) *Für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt:* $\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_i) = \operatorname{span}(c', \ldots, c^{(i)})$ *und* $\langle e_i, c^{(i)}\rangle > 0$.

Beweis. Mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren definieren wir:

$$e_1 := \frac{c'}{|c'|}, \quad e_2 := \frac{c'' - \langle c'', e_1\rangle e_1}{|c'' - \langle c'', e_1\rangle e_1|}, \quad \ldots, \quad e_{n-1} := \frac{c^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2}\langle c^{(n-1)}, e_j\rangle e_j}{\left|c^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2}\langle c^{(n-1)}, e_j\rangle e_j\right|}.$$

Für Frenet-Kurven sind die rechten Seiten definiert, und es sind jeweils glatte Funktionen von t. Der letzte Vektor e_n ist durch (i) eindeutig bestimmt (und ebenfalls glatt). □

Wir verallgemeinern nun die Matrixgleichung (11). Dabei erhalten wir $n-1$ Krümmungen als Verallgemeinerung von κ, τ des dreidimensionalen Falles.

Satz 19. *Ist c nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit Rahmen $e_1(t), \ldots, e_n(t)$, so gibt es $n-1$ Funktionen $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die sogenannten* Frenet-Krümmungen, *mit*

(26)
$$(e_1'e_2'..e_n') = (e_1e_2..e_n)\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

und $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2} > 0$.

Wir schreiben abkürzend die $n \times n$-Matrizen in (26) als $E'(t) = E(t)K(t)$.

Beweis. Sei zunächst $i < n$. Wir setzen $\kappa_i := \langle e_i', e_{i+1}\rangle$. Nach (ii) ist $e_i \in \operatorname{span}\{c', \ldots, c^{(i)}\}$, d.h. e_i eine Linearkombination der Ableitungen von c. Durch Ableiten dieser Linearkombination folgt $e_i' \in \operatorname{span}(c', \ldots, c^{(i+1)}) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{i+1})$. Dies bedeutet aber, dass die hinteren Zeileneinträge von K verschwinden: $\langle e_i', e_{i+2}\rangle = \ldots = \langle e_i', e_n\rangle = 0$.

Schließlich ist K schiefsymmetrisch, denn für alle i, j gilt $0 = \langle e_i, e_j\rangle' = \langle e_i', e_j\rangle + \langle e_i, e_j'\rangle$. Daraus folgt (26).

Für $i \leq= n-2$ sind die κ_i positiv:

$$\langle e_i', e_{i+1}\rangle = \left\langle \left(\frac{c^{(i)} - \sum_j^{i-1}\langle.,.\rangle e_j}{|c^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1}\langle.,.\rangle e_j|}\right)', e_{i+1}\right\rangle \overset{(*)}{=} \left\langle \frac{c^{(i+1)}}{|c^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1}\langle.,.\rangle e_j|}, e_{i+1}\right\rangle \overset{(ii)}{>} 0.$$

Bei $(*)$ haben wir folgendes benutzt: Für $j \leq i-1$ ist $e_j' \in \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_i)$, und dieser Raum steht senkrecht auf e_{i+1}; auch e_j selbst und $c^{(i)}$ stehen senkrecht auf e_{i+1}. Daher trägt nur der angegebene Term des abgeleiteten Ausdrucks zum Skalarprodukt bei. □

Bemerkungen. 1. Damit κ_i erklärt werden kann, müssen nur die i Vektoren $c', \ldots, c^{(i)}$ linear unabhängig sein.

2. Ist $c(s)$ nicht nach Bogenlänge parametrisiert, so ist $\kappa_i := \frac{1}{|c'|}\langle e_i', e_{i+1}\rangle$ die parametrisierungsunabhängige Größe. Nur κ_{n-1} ändert sich unter orientierungsvertauschenden Umparametrisierungen.

4.2. **Hauptsatz der Kurventheorie.** In Satz 11 haben wir gezeigt, dass die Krümmung eine ebene Kurve bis auf Bewegungen (Translationen und Drehungen) bestimmt. Entsprechendes gilt für Raumkurven bei gegebenen Frenet-Krümmungen. Anstelle der expliziten Integration müssen wir dazu allerdings eine Differentialgleichung lösen.

Satz 20. *Seien $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ glatte Funktionen mit $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2} > 0$ auf $(a,b) \ni t_0$. Ferner sei $p \in \mathbb{R}^n$ und $\big(e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0)\big)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*
- *c hat als Anfangswerte $c(t_0) = p$ und den Frenet-Rahmen $\big(e_i(t_0)\big)_{1\leq i\leq n}$ zur Zeit t_0.*
- *Die Frenet-Krümmungen von c sind $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ für jedes $t \in (a,b)$.*

Die Helices haben konstante Krümmung und Torsion. Weil ihre Krümmung jeden positiven Wert, und die Torsion jeden Wert annehmen kann, ergibt aus dem Hauptsatz folgende Aussage: Jede Kurve konstanter positiver Krümmung und konstanter Torsion ist eine Helix (möglicherweise ist $h = 0$, d.h. die Helix ein Kreis).

Beweis. Die Funktionen κ_i definieren eine Matrix K wie in (26). Gesucht ist zunächst die Matrix $E(t) = \big(e_1(t), \ldots, e_n(t)\big)$. Sie ist Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

(27)
$$E'(t) = E(t)K(t).$$

Dieses System hat nach dem Existenzsatz eine Lösung $E(t)$ zu gegebenem Anfangswert $E(t_0) := \big(e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0)\big)$. Wir müssen aber noch folgendes zeigen:
1. Nicht nur für t_0, sondern für alle t ist $E(t)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, d.h. $E(t) \in \mathsf{SO}(n)$.
2. Es gibt eine Frenet-Kurve $c(t)$ mit Frenet-Rahmen $E(t)$ und -Krümmungen $\kappa_i(t)$.
3. c ist eindeutig bestimmt.

1. Wir zeigen dazu $E^T(t)E(t) = 1_n$ und $\det E(t) \equiv 1$. Dazu leiten wir zuerst aus (27) eine Differentialgleichung her, die von EE^T erfüllt wird:

$$(E^TE)' = E'^TE + E^TE' = K^T(E^TE) + E^TEK,$$

d.h. die Matrix $F(t) := E^TE(t)$ erfüllt $F' = K^TF + FK$. Diese Differentialgleichung wird wegen $K = -K^T$ einerseits von $F \equiv 1_n$ gelöst. Andererseits ist auch E^TE eine Lösung mit demselben Anfangswert $\big(E^TE\big)(t_0) = 1_n$, denn die $e_i(t_0)$ bilden ein Orthonormalsystem.

Wegen des Eindeutigkeitssatzes für Differentialgleichungen folgt $E^T E \equiv 1_n$. Damit haben wir $E \in \mathsf{O}(n)$ gezeigt, also $\det E(t) \in \{\pm 1\}$. Aber E ist als Lösung von (27) stetig in t, und $\det E(t_0) = 1$. Es folgt $\det E(t) \equiv 1$, und damit $E(t) \in \mathsf{SO}(n)$ für alle t. Damit ist die definierende Eigenschaft (i) eines Frenet-Rahmens für E bestätigt.

`7. Vorlesung, Mittwoch 15.5.02` ______________________________

2. Die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t) := p + \int_{t_0}^t e_1(s)\,ds$ erfüllt

$$c' \overset{\text{Def. } c}{=} e_1, \quad c'' = e_1' \overset{(26)}{=} \kappa_1 e_2, \quad c''' = (\kappa_1 e_2)' = \kappa_1' e_2 + \kappa_1(-\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3), \quad \dots,$$

bzw. allgemein

$$c^{(i)} = (\text{Linearkombination der } e_1, \dots, e_{i-1}) + \underbrace{\kappa_1 \cdot \ldots \cdot \kappa_{i-1}}_{\text{n.V. } > 0}\, e_i \quad \text{für } i \le n-1. \tag{28}$$

Es folgt: Die $c^{(i)}$ sind linear unabhängig, und $\langle c^{(i)}, e_i \rangle > 0$. Insbesondere ist c eine Frenet-Kurve, und die definierende Eigenschaft (ii) eines Frenet-Rahmen ist für E gezeigt. Daher ist E der Frenet-Rahmen von c; weil (26) gilt, sind die κ_i die Frenet-Krümmungen.

3. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, denn das System $E' = EK$, $c' = e_1$ erfüllt eine Lipschitz-Bedingung. □

5. ÜBUNGSAUFGABEN

5.1. **Bogenlänge, Umparametrisierung.**

Aufgabe 1 – Kreis:

Es seien $v \perp w$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit Länge $|v| = |w| = r$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung eines Kreises in $\mathbb{R}^n$ an, der v und w enthält.
b) Geben Sie auch eine Parametrisierung nach Bogenlänge an.

Aufgabe 2 – Nicht-rektifizierbare Kurve (GB 02):

Es sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) = \big(t, t\cos\frac{1}{t}\big)$ für $t \in (0,1]$ und $c(0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass c stetig ist.
b) Skizzieren Sie c und zeigen Sie $\|c(\frac{1}{k\pi}) - c(\frac{1}{(k+1)\pi})\| \ge \frac{2}{(k+1)\pi}$ für $k \in \mathbb{N}$.
c) Folgern Sie, dass c nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 3 – Polarkoordinaten und Logarithmische Spirale (Reif 08):

Gegeben sei eine Kurve der Form

$$c(t) = \big(r(t)\cos t,\, r(t)\sin t\big), \quad t \in I.$$

a) Bestimmen Sie $|c'(t)|$. Welche Bedingung muss die Funktion r erfüllen, damit c regulär ist?
b) Sei nun speziell $r(t) = e^{-t}$ und $I = [0,\infty)$. Skizzieren sie die Spur der Kurve, berechnen Sie die Länge $L(c)$ und geben Sie die Parametrisierung $\tilde c$ von $[c]$ nach der Bogenlänge an.

Aufgabe 4 – Länge einer Kurve und Bogenlänge (Bergner 04):

Gegeben ist die Kurve

$$c(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad c(t) := \big(t^2, t\sqrt{1-t^2}\big)\,.$$

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.
b) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve c nach Bogenlänge an.
c) Zeigen Sie $\lim_{t\to+1} c(t) = \lim_{t\to-1} c(t)$, d.h. die Kurve ist geschlossen.
Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm 1} c'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5 – Umparametrisierung (Bergner 04):

Welche Parametrisierungen repräsentieren dieselbe orientierte Kurve?

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= (\cos t, \sin t) \quad , t \in (0,\pi) \\ c_2(t) &:= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \sin t \cos t) \quad , t \in (0,\pi) \\ c_3(t) &:= (t, \sqrt{1-t^2}) \quad , t \in (-1,1) \\ c_4(t) &:= \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right) \quad , t \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 – Umparametrisierung als Äquivalenzrelation:

a) Zeigen Sie, dass Umparametrisierung eine Äquivalenzrelation auf der Menge
$$\mathcal{C} := \{c \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n), c'(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in (0,1)\}$$
darstellt. Zeigen Sie dies auch für orientierungstreue Umparametrisierung.

b) Zeigen Sie, dass es in $\langle c \rangle$ genau eine Parametrisierung $\tilde{c}$ nach der Bogenlänge gibt.
Hinweis: Die Existenz einer derartigen Parametrisierung wurde bereits in der Vorlesung gezeigt. Nehmen Sie also an, dass es zwei verschiedene Parametrisierungen nach der Bogenlänge gibt.

Aufgabe 7 – Geraden sind am kürzesten (GB 02):

Schließen Sie aus dem Folgenden, dass die Gerade $g(t) := (t, 0)$ für $t \in [0,1]$ die kürzeste Verbindung der Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ ist.

a) Zeigen Sie, dass die Länge der Gerade g gleich 1 ist.

b) Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (0,0)$ sowie $c(1) = (1,0)$ eine Kurve mit $c(t_0) \notin [0,1] \times \{0\}$ für ein $t_0 \in [0,1]$. Zeigen Sie für ihre Länge $L(c) > 1$.

Aufgabe 8 – Die Kettenlinie (GB 05):

Ein Seil sei an seinen beiden Endpunkten befestigt. Wir bestimmen hier die Form der Kurve, die das Seil beschreibt.

Wir nehmen an, die beiden Punkte liegen nicht übereinander und die Kurve läßt sich schreiben als Graph
$$\{(x, f(x)), x \in [0,b]\}.$$
Zu $0 \le t \le b$ betrachten wir das Teilstück $(x, f(x))$ der Kurve mit $0 \le x \le t$. Die Tangentialvektoren in dessen Endpunkten, $T_0 := (1, f'(0))$ und $-T_t := -(1, f'(t))$, entsprechen den tangential nach innen wirkenden Kräften. Beachten Sie, dass wir die Längen von $T_0, -T_t$ bereits so gewählt haben, dass die Kräfte Horizontalkomponenten 1 bzw. -1 besitzen, die sich ausgleichen.

a) Formulieren Sie eine Kräftebilanz für die Vertikalkomponenten der Kräfte: Die vom Seil ausgeübte Gewichtskraft entspricht dem ρ-fachen der Länge des Teilstücks, für $\rho > 0$. Sie ist gleich der Summe der beiden Vertikalkomponenten von T_a und T_t.

b) Leiten Sie aus a) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung her.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. Hatte Galilei 1638 recht, der die Lösungskurve als eine Parabel bestimmte?

Noch zwei Bemerkungen:
1. Eine andere und vielleicht bessere Herleitung der Kettenlinie ergibt sich variationell: Die Kettenlinie ist diejenige Form einer hängenden Kurve, bei der der Schwerpunkt am tiefsten liegt.
2. Anwendungen der Kettenlinie in der Architektur benutzen die Umkehrung, eine stehende Kettenlinie; sie befindet sich genauso im Gleichgewicht (vergleiche Experiment im Mathematik-Museum in Gießen).

5.2. Krümmung ebener Kurven.

Aufgabe 9 – Ellipse (GB 02):

Berechnen Sie die Krümmung κ einer Ellipse $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, wobei $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. In welchen Punkten wird die Krümmung maximal bzw. minimal? Diese Punkte nennt man *Scheitelpunkte*.

Aufgabe 10 – Traktrix (GB 02):

Die *Schleppkurve* oder *Traktrix* ist die Kurve
$$c(t) := \left(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t \right) \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $c(t)$ regulär für alle $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.

b) Der Abstand zwischen $c(t)$ und dem Schnittpunkt der y-Achse und der Tangentengerade $\{c(t) + sc'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ist konstant für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

c) Skizzieren Sie die Kurve c und berechnen Sie ihre Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 11 – Graphen als Kurven (Bergner 04):

Zu einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erklären wir die Kurve
$$c(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := (t, f(t)) \ .$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $c(t)$ regulär?

b) Ermitteln Sie die Normale $\nu(t)$.

c) Geben Sie eine Parametrisierung von c nach Bogenlänge an.

d) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 12 – Krümmung unter linearen Abbildungen (GB 02):

Gegeben sei eine Kurve $c(t)\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa(t)$ sowie eine $2{\times}2$-Matrix A. Berechnen Sie die Krümmung $\tilde\kappa(t)$ der Kurve $\tilde c(t) := Ac(t)$ in Abhängigkeit von $\kappa(t)$. Was passiert im speziellen Fall einer orthogonalen Matrix A (d.h. $A^tA = E$)?

Aufgabe 13 – Krümmung und Normale auf Äquivalenzklassen (Reif 08):

Sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve.

a) In $[c]$ gibt es genau eine weitere Parametrisierungen $\hat c$ nach der Bogenlänge. Wie hängen $\tilde c$ und $\hat c$ miteinander zusammen?
b) In welchem Zusammenhang stehen die Krümmungen $\tilde\kappa := |\tilde c''|$ und $\hat\kappa := |\hat c''|$ sowie die Normalenvektoren $\tilde\nu := \tilde c''/|\tilde c''|$ und $\hat\nu := \hat c''/|\hat c''|$?

Aufgabe 14 – Flächeninhalt (Reif 08):

Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, regulär parametrisierte Kurve. Gemäß dem Greenschen Integralsatz in der Ebene gilt für den (orientierten) Flächeninhalt des von der Spur von c berandeten Gebiets

$$A(c) = \int_a^b \langle c(t), Pc'(t)\rangle\, dt, \quad P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Der Flächeninhalt ist eine Eigenschaft von $\langle c\rangle$, d.h., $A(c) = A(c \circ \varphi)$ für $\varphi' > 0$.
b) Der Flächeninhalt ist translationsinvariant, d.h., $A(c) = A(c+p)$ für konstante Vektoren $p \in \mathbb{R}^2$.
c) Der Flächeninhalt ist rotationsinvariant, d.h., $A(c) = A(Rc)$ für Rotationsmatrizen $R \in SO(2)$.

Aufgabe 15 – Durch ihre Krümmung gegebene Kurven, Klothoide (GB 02, Bergner 04):

Bestimmen Sie die nach Bogenlänge parametrisierten Kurven $c(t)$, deren Krümmungsfunktion $\kappa(t)$ wie folgt vorgegeben ist:

$$\text{a)} \quad \kappa(t) = \frac{1}{t+1}, \quad t \in [0,\infty) \qquad \text{b)} \quad \kappa(t) = at, \quad t \in [0,\infty)$$

Nehmen Sie dazu die beiden Bedingungen $c(0) = (0,0)$ sowie $c'(0) = (1,0)$ an. Das Ergebnis von b), die *Klothoide*, ist für $a \neq 0$ nicht elementar integrierbar. Skizzieren Sie die Kurven.

Aufgabe 16 – Evoluten (Bergner 04):

Es sei $c(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve, die der Einfachheit halber nach Bogenlängen parametrisiert sei. Ferner sei $\nu(t)$ die Normale und die Krümmung erfülle $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte

$$\gamma(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\nu(t)$$

nennt man *Evolute.*

a) Zeigen Sie, dass die Normalengerade $\{c(t) + s\nu(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ an $c(t)$ übereinstimmt mit der Tangentengerade an γ im Punkt $\gamma(t)$.
b) Es sei $\kappa'(t) < 0$ für $t \in [a,b]$. Zeigen Sie
$$L(\gamma) = \frac{1}{\kappa(b)} - \frac{1}{\kappa(a)}$$
für die Länge der Kurve γ.
c) Für welche $t \in [a,b]$ ist $\gamma(t)$ regulär?
d) Die Kurve
$$c(t) := (t + \sin t, -\cos t) \quad , \; t \in \mathbb{R}$$
nennt man *Zykloide*. Skizzieren Sie c und berechnen Sie ihre Evolute. Zeigen Sie, dass die Evolute der Zykloide wieder die Zykloide selbst ist (bis auf eine Translation).

Aufgabe 17 – Krümmungskreise (Bergner 04):

Gegeben sei eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t) = (x(t), y(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. In einem Punkt $t_0 \in (a,b)$ sollen die Bedingungen

$$c(t_0) = (r,0) \quad , \quad c'(t_0) = (0,1) \quad \text{sowie} \quad \kappa(t_0) > \frac{1}{r}$$

für ein $r > 0$ gelten. Weiterhin sei B_r die abgeschlossene Kreisscheibe $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

a) Skizzieren Sie die Kreisscheibe B_r sowie eine mögliche Lage der Kurve c.
b) Zeigen Sie, dass sich die Kurve c lokal um $c(t_0)$ innerhalb der Kreisscheibe B_r befindet.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion $f(t) := x(t)^2 + y(t)^2$ in t_0 ein striktes lokales Maximum annimmt.

Aufgabe 18 – Parallelkurven (GB 02):

a) Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie, dass die Parallelkurve c_d die folgende Krümmung besitzt:
$$\kappa_d(t) = \frac{\kappa(t)}{1 - d\kappa(t)}$$
Interpretieren Sie das Ergebnis mit Krümmungskreisen!
b) Geben Sie eine reguläre Kurve c an, so dass für kein $d \neq 0$ die Parallelkurve c_d regulär ist.

Aufgabe 19 – Konvexität einfach geschlossener Kurven mit positiver Krümmung (Bergner 04):

Gegeben sei eine geschlossene Kurve $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, die nach Bogenlänge parametrisiert sei. Ihr Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mit $c'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ erfülle $\vartheta(b) - \vartheta(a) \leq 2\pi$ und ihre Krümmung $\kappa(t) \geq 0$. Weiterhin gelte

$$c(a) = c(b) = (0,0) \quad \text{sowie} \quad c'(a) = c'(b) = (1,0)\ .$$

Zeigen Sie, dass $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt, d.h. die Kurve c liegt oberhalb der x-Achse.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y(t)$ in a ein globales Minimum annehmen muss.
Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Kurve auf dem Intervall $[a,b)$ injektiv ist.

Aufgabe 20 – Konvexität (Reif 08):

Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Jordankurve und G das von $c(I)$ berandete beschränkte Gebiet. Zeigen Sie: G ist genau dann konvex, wenn $\kappa \geq 0$.

Aufgabe 21 – Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist (GB 02):

Wir betrachten eine Helix $c(t) := \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$ mit $0 < |h| \leq r$.

a) Zeigen Sie: Es existieren $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, so dass $c'(t_1)$ und $c'(t_2)$ senkrecht aufeinander stehen.
b) Für t_1, t_2 wie in (a) betrachten wir die Normalenebenen $E_1 := \{c(t_1) + v \mid v \perp c'(t_1)\}$ und $E_2 := \{c(t_2) + v \mid v \perp c'(t_2)\}$. Spiegeln Sie das Kurvenstück $c|_{[t_1,t_2]}$ an den Normalenebenen, um eine geschlossene C^2-Kurve in $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren, die konstante Krümmung hat, aber kein Kreis ist.

Aufgabe 22 – Frenet-Gleichungen (15.5.06):

Beweisen Sie die Frenetschen Differentialgleichungen (**??**).

5.3. **Jordanscher Kurvensatz.**

Aufgabe 23 – Eigenschaft von Jordankurven (GB 06):

Beweisen Sie: Jede Jordankurve ist beschränkt, Zu jeder Jordankurve Γ gibt es für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ ein $\lambda(\varepsilon)$, so dass jedes Punktepaar $p, q \in \Gamma$ mit $|p - q| < \lambda(\varepsilon)$ die Kurve Γ in zwei Teilbögen Γ_1, Γ_2 zerlegt, von denen eine, sagen wir Γ_1, einen Durchmesser kleiner als ε hat.

Aufgabe 24 – Zusammenhangskomponenten (Bergner 04):

a) Ermitteln Sie die Wegzusammenhangskomponenten der Mengen

$$M_1 := \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad , \quad M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Z} \text{ und } y \notin \mathbb{Z}\} \quad \text{sowie} \quad M_3 := \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{Z}^2\ .$$

b) Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R} \in C^0(V,\mathbb{R})$ nennt man lokal konstant, falls es zu jedem $x \in V$ eine offene Menge $U(x) \subset V$ mit $x \in U(x)$ gibt, so dass f in U konstant ist.
Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : V \to \mathbb{R} \in C^1(V,\mathbb{R})$ mit $\operatorname{grad} f = 0$ in V lokal konstant ist.
c) Finden Sie ein $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine lokal konstante Funktion $f : V \to \mathbb{R}$, welche nicht konstant ist.
d) Es sei V wegzusammenhängend und offen sowie $f : V \to \mathbb{R} \in C^0(V,\mathbb{R})$ lokal konstant. Zeigen Sie, dass f konstant in V ist.

Aufgabe 25 – Zusammenhangskomponenten des Einheitsquadrates (Bergner 04):

Es sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat mit seinem Rand ∂Q. Zeigen Sie (ohne Benutzung des Jordanschen Kurvensatzes), dass $\mathbb{R}^2\backslash\partial Q$ genau zwei Zusammenhangskompononenten besitzt.

Aufgabe 26 – Zusammenhangskomponenten von implizten Flächen (Bergner 04):

Gegeben sei eine Abbildung $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sowie die Menge

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}\ .$$

Es gebe ein $x_0 \in \Gamma$ mit $\operatorname{grad} F(x_0) \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma$ mindestend zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.
b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auch mehr als zwei Zusammenhangskomponenten möglich sind.

Aufgabe 27 – Zusammenhangskomponenten homöomorpher Mengen (Bergner 04):

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^0(U,V)$ nennt man Homöomorphismus, falls f stetig und bijektiv und ihre Inverse f^{-1} ebenfalls stetig ist. Die Mengen U und V nennt man zueinander homöomorph, falls es einen solchen Homöomorphismus gibt.
Es seien U und V zueinander homöomorph und U besitze genau $N \in \mathbb{N}$ Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie, dass V ebenfalls genau N Zusammenhangskomponenten besitzt.

Teil 2. Die äußere Geometrie von Hyperflächen

`6. Vorlesung, Montag 12.6.06`

Wir wenden uns der Geometrie von Flächen zu. Wie bei Kurven studieren wir die sogenannte *lokale Geometrie*; es geht dabei um den Krümmungsbegriff. Wir benötigen dafür die Analysis mehrerer Veränderlicher; lineare Algebra wird ebenfalls eine entscheidende Rolle spielen.

Genauer wollen wir mit Hilfe der Normalenabbildung untersuchen, wie eine Fläche im umgebenden Raum liegt. In diesem Sinne betrachten wir die *äußere Geometrie* von Flächen. Die Ableitung der Normalenabbildung liefert dann die verschiedenen Krümmungsbegriffe für Flächen: Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.

1. Parametrisierte Flächen

1.1. **Bezeichnungen.** Wir verwenden den Buchstaben U für Gebiete des $\mathbb{R}^n$, d.h. für offene (weg-)zusammenhängende Teilmengen.

Ist $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so bezeichnen wir mit df_p das Differential. Es ist immer am einfachsten, sich darunter die Jacobimatrix von f vorzustellen. Diese Matrix hängt vom sogenannten *Fußpunkt* p ab, den wir der Übersichtlichkeit halber in vielen Fällen einfach weglassen.

Eine *Richtungsableitung* in Richtung eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$ notieren wir als

$$\partial_X f(p) := \frac{d}{dt} f(p + tX)\Big|_{t=0}.$$

Üblicherweise berechnet man eine Richtungsableitung, indem man die Jacobimatrix df auf den Vektor X anwendet, d.h. $\partial_X f(p) = df_p(X)$. Wir schreiben auch $df\, X$ statt $df(X)$, weil wir $df(X)$ als Matrixprodukt auffassen.

Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots)$ schreiben wir als $e_1, \ldots, e_n$. Benutzen wir andere Koordinaten, wie etwa (t, φ), so schreiben wir auch e_t, e_φ. Eine partielle Ableitung ist natürlich eine spezielle Richtungsableitung (in Richtung des i-ten Basisvektors e_i):

$$\partial_i f(p) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df_p(e_i) = \partial_{e_i} f(p)$$

Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ heißt *Immersion*, wenn für jedes $p \in U$ das Differential $df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ den Rang n hat. (Warum gilt dann $n \le m$?)

1.2. **Flächenstücke.** Wie bei Kurven wollen wir Selbstschnitte zulassen, und parametrisierungsunabhängige Eigenschaften von $f(U)$ studieren. Wir definieren daher ganz analog:

Definition. (i) Ein *parametrisiertes Flächenstück* ist eine glatte Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$.
(ii) Zwei parametrisierte Flächenstücke $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde f\colon \tilde U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißen äquivalent, wenn $\tilde f = f \circ \varphi$ für einen Diffeomorphismus φ ist (φ ist also invertierbar und φ wie φ^{-1} sind glatt). Ein *Flächenstück* ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächenstücke.

Die Glattheit ist kaum je nötig, meist reicht zweimal stetig differenzierbar. Wenn die Immersion eine *Einbettung* ist, also ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ sogar Untermannigfaltigkeit.

Jedem $p \in U$ und $X \in \mathbb{R}^n$ können wir auf der Fläche den *Tangentialvektor* $df_p(X)$ zuordnen. Die Menge der Tangentialvektoren bildet den *Tangentialraum* in p,

$$T_p f := \{df_p(X) \mid X \in \mathbb{R}^n\},$$

einen n-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Es dient der Unterscheidung von verschiedenen Tangentialräumen in Doppelpunkten, dass wir als Index einen Punkt p aus dem Parametergebiet U nehmen. Den Vektor X stellen wir uns als tangential an die Parametermenge U mit *Fußpunkt* p vor. Wir werden oft X, Y schreiben, ohne explizit zu sagen, dass dies Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

Die Immersionseigenschaft bedeutet:

Lemma 1. *Für jedes $p \in U$ ist $df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_p f$ ein Vektorraumisomorphismus.*

Wie sieht derselbe Tangentialvektor in zwei verschiedenen Parametrisierungen aus?

$$(1)\quad \tilde f = f \circ \varphi,\ \ p = \varphi(\tilde p),\ \ X = d\varphi_{\tilde p}(\tilde X) \quad \Rightarrow \quad df_p(X) = df_{\varphi(\tilde p)}\big(d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)\big) \overset{\text{Kettenr.}}{=} d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X)$$

Tangentialvektoren transformieren sich also mit dem Differential der Parametertransformation, bzw. mit deren Jacobimatrix.

Einen Tangentialvektor $df_p(X)$ an eine Fläche kann man stets als den Tangentialvektor einer Kurve in der Fläche schreiben: Dazu wählt man $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\gamma(t) := p + tX$, und $c := f \circ \gamma$. Dann gilt

$$c'(0) = df_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = df_p(X).$$

1.3. **Erste Fundamentalform.** Die längentreue Parametrisierung nach der Bogenlänge ist für Kurven nützlich. Wie aus der Kartographie bekannt, hat aber nicht jede Fläche eine längentreue Parametrisierung; Gauß hat mit dem *theorema egregium* eine äquivalente Bedingung gefunden, die durch Krümmungen formuliert ist. Es bleibt daher nichts übrig, als mit verzerrenden Parametrisierungen zu arbeiten. Wir sehen das Maß der Verzerrung als eine Eigenschaft des Parameterbereiches an:

Definition. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrisiertes Flächenstück, und $p \in U$. Die *erste Fundamentalform* ist die Abbildung

$$g\colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad g_p(X,Y) := \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle.$$

Wir bezeichnen $\|X\|_p := |df_p(X)| = \sqrt{g_p(X,X)}$ als *(Riemannsche) Länge* von X.

Beispiel. Die Länge einer Kurve $c := f \circ \gamma$ ist

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\,dt = \int_a^b |df_{\gamma(t)}\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|_{\gamma(t)}\,dt.$$

Man darf also im Parameterbereich integrieren, sofern man die Längenverzerrung der Fläche durch $\|.\|$ berücksichtigt.

Die erste Fundamentalform ist bilinear und symmetrisch in (X,Y). Sie ist positiv definit, $g_p(X,X) = \big|df_p(X)\big|^2 > 0$ für $X \neq 0$, da f Immersion ist. Die erste Fundamentalform ist daher ein Skalarprodukt, das auf glatte Weise vom Fußpunkt p abhängt.

Weil g nur von den Verhältnissen im Bild bestimmt wird, transformiert sich g für $\tilde f = f \circ \varphi$ wie folgt. Mit den Bezeichnungen von (1) gilt:

$$\tilde g_{\tilde p}(\tilde X, \tilde Y) := \big\langle d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X), d\tilde f_{\tilde p}(\tilde Y)\big\rangle = \big\langle df_p(\underbrace{d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)}_{X}),\ df_p(\underbrace{d\varphi_{\tilde p}(\tilde Y)}_{Y})\big\rangle = g_p\big(X,Y\big).$$

Wir wollen die erste Fundamentalform auch in Matrixform bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von $U \subset \mathbb{R}^n$ schreiben. Wir setzen dazu

$$g_{ij} (= g_{ji}) := g_p(e_i, e_j) = \Big\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\rangle, \qquad 1 \le i,j \le n;$$

Es seien nun zwei *Vektorfelder* $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Schreiben wir

$$X(p) = \big(X^1(p), \dots, X^n(p)\big) = \sum_{i=1}^n X^i(p) e_i$$

und entsprechend für $Y(p)$, so erhalten wir

$$g(X,Y) = g\big(\textstyle\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big) \overset{g \text{ bilinear}}{=} \displaystyle\sum_{i,j=1}^n X^i Y^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j.$$

So wie hier lassen wir oft die Abhängigkeit vom Fußpunkt $p \in U$ fort. Wir schreiben Vektorkomponenten oben wie unten; meist wird über Paare von oberen und unteren Indices summiert.

Beispiele. 1. Das *Helikoid* oder die *Wendelfläche* ist die parametrisierte Fläche

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x \sin y, -x\cos y, y). \tag{2}$$

Für jedes feste x sind die Parmeterlinien $y \mapsto f(x,y)$ Helices vom Radius x mit Ganghöhe 2π. Für jedes feste y sind die Parameterlinien $x \mapsto f(x,y)$ Geraden. Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x \sin y \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Die Funktion g_{22} gibt die quadrierte Länge des Tangentialvektors der Helices an, die in $|x|$ wächst. Weil die Geraden nach Bogenlänge parametrisiert ist g_{11} konstant und $g_{12} = g_{21}$ zeigt, dass die Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen.

2. Zu einer (Höhen-)Funktion $u\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten wir den Graphen $f(x) := \big(x, u(x)\big)$ mit

$$g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle = \big\langle (e_i, \partial_i u), (e_j, \partial_j u)\big\rangle = \delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u.$$

Daher hat X die quadrierte Länge

$$\|X\|^2 = |df(X)|^2 = \sum_{i,j} X^i(\delta_{ij} + \partial_i u \partial_j u) X^j = |X|^2 + \langle \operatorname{grad} u, X\rangle^2.$$

In der Tat: Senkrecht zu $\operatorname{grad} u$ ist u in erster Ordnung konstant, so dass senkrechte Vektoren im Graphen die gleiche Länge haben; die zu $\operatorname{grad} u$ parallelen Vektoren werden am meisten im Graphen verlängert.

Bemerkung. Das Standard-Skalarprodukt auf U spielt für uns keine Rolle. Wenn wir Begriffe wie "senkrecht" oder "Orthonormalbasis" für U bzw. für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verwenden, so meinen wir dies bezüglich g. Insbesondere betrachten wir $e_1, \dots, e_n$ nicht als Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes, sondern nur als die uns durch die konkrete Realisierung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Parametergebiets gelieferte Basis. Benötigen wir eine g_p-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$, so können wir sie durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bestimmen.

`7. Vorlesung, Montag 19.6.06`

2. DIE NORMALEN-ABBILDUNG VON HYPERFLÄCHEN UND IHRE ABLEITUNGEN

Wir spezialisieren von nun an auf den Fall von Kodimension 1, also $m = n+1$. Flächen $f\colon U^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißen auch *Hyperflächen.*

2.1. **Gauß-Abbildung.** Wir betrachten den *Normalraum*

$$N_p f := (T_p f)^\perp, \qquad p \in U.$$

Für Hyperflächen ist $N_p f$ eindimensional und wird durch Einheitsvektoren aufgespannt:

Definition. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ parametrisiertes Hyperflächenstück, so heißt eine stetige Abbildung $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ mit

$$\big\langle \nu(p), df_p(X) \big\rangle = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n \text{ und } p \in U$$

eine *Gauß-Abbildung* oder Normalen-Abbildung.

Im Falle $n = 2$ kann man auch mit dem Vektorprodukt definieren

$$\nu(p) := \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \frac{\partial f}{\partial y}(p)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right|},$$

dabei ist $v \times w = \big(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_2\big)$. Man sieht der Formel sofort an, dass ν glatt ist. Entsprechend kann man auch in höherer Dimension die Gauß-Abbildung definieren, aber wir verzichten hier auf die Details.

Beispiel. Für einen Graphen $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ lautet die obere Normale

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\big(- \nabla u, 1\big), \tag{4}$$

denn ν hat Länge 1 und steht senkrecht auf $\partial_i f = (e_i, \partial_i u)$ für alle i.

Bemerkung. Man kann die Wahl der Normale festhalten, indem man vom parametrisierten Flächenstück (f, ν) spricht. Eine bestimmte Normale kann man dadurch auswählen, dass man verlangt: $\big(df(e_1), \dots, df(e_n), \nu\big)$ sind positiv orientiert. Eine solche Normale nenne ich die *orientierte Normale*.

2.2. **Kurven in Flächen: Normal- und geodätische Krümmung.** Wir wollen nun die Krümmung von Kurven in Hyperflächen untersuchen. Dazu sei $\gamma\colon (a, b) \to U$ eine Kurve, und $c := f \circ \gamma$. Wir nehmen an, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. γ hat die Riemannsche Länge $\|\gamma'\| \equiv 1$. Um festzustellen, wie sich die Raumkurve c innerhalb der Fläche (f, ν) krümmt, zerlegen wir den Krümmungsvektor c'' orthogonal in einen Anteil tangential und einen Anteil normal zum Tangentialraum:

$$c'' = c''^\top + c''^\perp = c''^\top + \langle c'', \nu \circ \gamma\rangle(\nu \circ \gamma) \quad \in T_\gamma f \oplus N_\gamma f. \tag{5}$$

Die Beträge der Vektoren auf der rechten Seite sind die entscheidenden Ausdrücke der Flächentheorie: Die *geodätische Krümmung* $|c''^\top|$ ist der Kernausdrück für die innere Geometrie, während wir für die äußere Geometrie die *Normalkrümmung* $\langle c'', \nu\circ\gamma\rangle$ untersuchen.

Wir werden sehen, dass die Normalkrümmung allein aus der Krümmung der Fläche entsteht, während die geodätische Krümmung angibt, wie sehr sich die Kurve in der Fläche krümmt.

Beispiele. 1. Jede Kurve in der Ebene hat nur geodätische Krümmung.
2. Der Berührkreise eines Rotationstorus mit einer Ebene hat nur geodätische Krümmung.
3. Ein Großkreis in der Sphäre ist eine Kurve, die nur Normalkrümmung besitzt; für alle anderen Kreise in der Sphäre gilt das nicht.

Wir können für die Normalkrümmung schreiben:

$$\kappa_{\text{norm}} := \langle c'', \nu \circ \gamma\rangle \overset{\langle c', \nu\rangle = 0}{=} -\big\langle c', d\nu_\gamma(\gamma')\big\rangle = -\big\langle df_\gamma(\gamma'), d\nu_\gamma(\gamma')\big\rangle \tag{6}$$

Dies führt uns auf die genauere Untersuchung des Differentials $d\nu$ der Gauß-Abbildung.

2.3. **Weingarten-Abbildung.** Wenn wir in U längs einer Kurve $\gamma(t)$ laufen, wie ändert sich dann die Flächennormale $\nu \circ \gamma$? Auf jeden Fall ist $d\nu_\gamma(\gamma')$ tangential:

Lemma 2. *Für jedes $p \in U$ bildet die Abbildung $d\nu_p$ den Raum $\mathbb{R}^n$ auf $T_p f$ ab.*

Beweis. Wir berechnen $d\nu_p(X)$, indem wir ν auf eine Kurve γ in U einschränken, die $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$ erfüllt. Wegen

$$0 = \langle \nu \circ \gamma, \nu \circ \gamma\rangle' = 2\langle d\nu_\gamma(\gamma'), \nu \circ \gamma\rangle$$

folgt für $t = 0$ dann $0 = \langle d\nu_p(X), \nu(p)\rangle$, d.h. $d\nu_p(X) \perp \nu(p)$. □

Wir wollen den Effekt von $d\nu$ auf dem parametrisierenden Gebiet U messen. Nach Lemma 1 gibt es für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ genau ein $Y \in \mathbb{R}^n$, das die Gleichung $d\nu_p(X) = df_p(Y)$ erfüllt. Geometrisch bedeutet diese Gleichung, dass, wenn man in Richtung X im Parametergebiet geht, die Gauß-Abbildung von f sich in Richtung $df(Y)$ ändert. Die Abbildung $X \mapsto Y$ wird für unsere Krümmungsdefinition entscheidend werden, und wir geben ihr einen Namen:

Definition. Die *Weingartenabbildung* (engl. *shape operator*) von (f, ν) ist die Abbildung

$$S\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{mit} \qquad df_p(S_p X) = -d\nu_p(X),$$

die nach Lemma 1 and 2 eindeutig bestimmt ist.

Das gewählte Vorzeichen hat historische Gründe, vergleiche dazu (12) weiter unten.

Die Weingartenabbildung hat die folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $S_p X = -(df_p)^{-1} d\nu_p(X)$. Dabei ist $d\nu$ der wesentliche Teil. Das Differential df sehen wir nur an als nötige Übersetzungsvorschrift vom Parametergebiet ins Bild.

2. $X \mapsto S_p X$ ist linear für jedes $p \in U$, d.h. S_p ist Endomorphismus.

3. S ändert sein Vorzeichen mit ν.

4. Unter einer Parametertransformation $\tilde f := f \circ \varphi$ mit $\tilde\nu = \nu \circ \varphi$ bleibt die Weingartenabbildung ähnlich:

$$\tilde S_{\tilde p} := -(d\tilde f_{\tilde p})^{-1} \cdot d\tilde\nu_{\tilde p} = -(d\varphi_{\tilde p})^{-1} \cdot (df_p)^{-1} \cdot d\nu_p \cdot d\varphi_{\tilde p} = (d\varphi_{\tilde p})^{-1} \cdot S_p \cdot d\varphi_{\tilde p}; \tag{7}$$

Dabei sei $p = \varphi(\tilde p)$, etc.

Beispiele. 1. Für eine Ebene $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$ ist $\nu \equiv (0,0,1)$ Normale. Also gilt $d\nu = 0$ und die Weingartenabbildung bildet $\mathbb{R}^2$ auf 0 ab, $S \equiv 0$.

2. Für den Einheits*zylinder*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (\cos x, \sin x, y) \tag{8}$$

wählen wir die innere Normale, $\nu(x,y) = \big(-\cos x, -\sin x, 0\big)$. Also hat man $d\nu(e_1) = (\sin x, -\cos x, 0) = -df(e_1)$ und $d\nu(e_2) = 0$, d.h. die Normale kippt, $Se_1 = e_1$, oder bleibt unverändert, $Se_2 = 0$.

3. Auf dem *hyperbolischen Paraboloid*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x,y,xy) \tag{9}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,0,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (0,1,x), \qquad \nu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y,-x,1).$$

Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt (warum?). Es gilt

$$df\,\big(S_{(0,0)}e_1\big) = -d\nu_{(0,0)}(e_1) = -\frac{\partial \nu}{\partial x}(0,0) = (0,1,0) = df_{(0,0)}(e_2),$$

d.h. entlang der e_1-Richtung führt die Normale eine Drehung aus, $S_{(0,0)}e_1 = e_2$. Ebenso gilt $S_{(0,0)}e_2 = e_1$.

2.4. **Zweite Fundamentalform.** Um die Weingartenabbildung näher zu untersuchen, ist es nützlich, eine Bilinearform zu definieren, mit der man leichter rechnen kann:

Definition. Die *zweite Fundamentalform* ist die fußpunktabhängige Bilinearform

$$b_p(X,Y) := \big\langle \nu(p), d^2 f_p(X,Y)\big\rangle, \qquad X,Y \in \mathbb{R}^n, \ \ p \in U. \tag{10}$$

Darin ist $d^2 f(X,Y)$ die *Hesse-Form*, also die zweite Richtungsableitung $\partial_X \partial_Y f$ oder

$$d^2 f(X,Y) = d^2 f\Big(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\Big) = \sum_{i,j} X^i Y^j \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{11}$$

Nach dem Schwarzschen Lemma vertauschen zweite partielle Ableitungen. Die Hesse-Form $d^2 f(X,Y)$ ist daher symmetrisch in X, Y und b ist deshalb symmetrische Bilinearform. Aus dieser Eigenschaft folgern wir eine Eigenschaft der Weingartenabbildung, die entscheidend für unsere Krümmungsdefinition werden wird:

Satz 3. *Die Weingartenabbildung S ist selbstadjungiert bezüglich g,*

$$g(SX,Y) = g(X,SY) \qquad \text{für alle } X,Y \in \mathbb{R}^n, \ \ p \in U.$$

Beweis. Die Richtungsableitung $\partial_X = \sum_i X^i \partial_i$ von $0 = \langle \nu, df(Y)\rangle$ ist

$$0 = \partial_X \big\langle \nu, df(Y)\big\rangle = \big\langle d\nu(X), df(Y)\big\rangle + \big\langle \nu, df^2(X,Y)\big\rangle.$$

Dadurch erhalten wir eine Beziehung zwischen zweiter Fundamentalform und Weingartenoperator:

$$b(X,Y) = \big\langle \nu, d^2 f(X,Y)\big\rangle = -\big\langle d\nu(X), df(Y)\big\rangle = g(SX,Y) \qquad \text{für alle } X,Y \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Wie bereits erwähnt ist die linke Seite symmetrisch, daher auch die rechte. □

Aus (12) erklärt sich das Vorzeichen bei der Definition von b und S.

2.5. **Satz von Meusnier und Matrixdarstellungen von S, b.** Wir geben noch weitere Resultate über Normalkrümmung, Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform an.

Satz 4 (Meusnier)**.** *Es sei ein Hyperflächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit Gauß-Abbildung ν gegeben. Die Normalkrümmung (6) jeder nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c ist bereits durch die Tangentenrichtung γ' und die Daten g, S der Fläche f bestimmt:*

$$\kappa_{norm}(\gamma') = b(\gamma',\gamma') = g(\gamma', S\gamma') \tag{13}$$

Beweis. Dies folgt aus

$$\kappa_{\text{norm}} = \big\langle (f\circ\gamma)'', \nu\circ\gamma\big\rangle = \big\langle d^2 f(\gamma',\gamma'), \nu\circ\gamma\big\rangle = b(\gamma',\gamma')$$ □

Die Normalkrümmung $\kappa_{\text{norm}}(X)$ in Richtung X ist also eine quadratische Form $b(X,X)$, deren Bilinearisierung die zweite Fundamentalform darstellt.

Beispiel. Wir betrachten Kurven im Zylinder (8) mit $Se_1 = e_1$ und $Se_2 = 0$. Weil e_1, e_2 bereits g-Orthonormalbasis ist, kann man einen Einheitsvektor γ' darstellen als $\gamma'(t) = \cos\alpha(t)\, e_1 + \sin\alpha(t)\, e_2$. Es gilt

$$\kappa_{\text{norm}}(\gamma') = g(\gamma', S\gamma') = g\big(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2,\ S(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2)\big) \overset{Se_1=e_1,\, Se_2=0}{=} \cos^2\alpha,$$

d.h. $0 \le \kappa_{\text{norm}} \le 1$.

Wir kommen nun zu Matrixdarstellungen. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$. hat die zweite Fundamentalform die symmetrische Matrix

$$b_{ij} := b(e_i, e_j) = -\Big\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\rangle = \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big\rangle. \tag{14}$$

Schreiben wir die Matrix-Darstellung von S als $S(e_j) = \sum_{i=1}^n S^i_j e_i$ und wenden wir (10) auf $X := e_i$ und $Y := e_j$ an, so erhalten wir

$$b_{ij} = g\big(e_i, S(e_j)\big) = g\big(e_i, \textstyle\sum_\ell S^\ell_j e_\ell\big) = \displaystyle\sum_l g(e_i, e_\ell) S^\ell_j = \sum_l g_{i\ell} S^\ell_j,$$

d.h. wir haben eine Matrizengleichung der Form $b = gS$ oder $g^{-1}b = S$. Wenn wir also mit (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix notieren, so lautet die letzte Gleichung

$$S^i_j = \sum_k g^{ik} b_{kj}. \tag{15}$$

Bemerkungen. 1. Im klassischen zweidimensionalen Fall wird für erste und zweite Fundamentalform oft die Notation von Gauß benutzt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

2. Das Produkt symmetrischer Matrizen ist nicht unbedingt symmetrisch. Daher ist S^i_j im allgemeinen nicht symmetrisch.

Beispiel. Ein Graph $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ mit $\partial_i f = \big(e_i, \partial_i u\big)$ hat die zweite Fundamentalform

$$b_{ij} = \langle \nu, \partial_{ij} f\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{ij} u \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial_{ij} u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{16}$$

Speziell für Punkte p mit horizontaler Tangentialebene gilt $\nabla u(p) = 0$, so dass $b_p(X,Y) = d^2u_p(X,Y)$ bzw. $b_{ij}(p) = \partial_{ij} u(p)$. Wegen $(g_{ij})_p = \delta_{ij}$ ist die Matrix von S in solchen Punkten dann ebenfalls durch $\partial_{ij} u$ gegeben.

`8. Vorlesung, Montag 26.6.06`

---

3. Krümmungsbegriffe für Hyperflächen

3.1. **Hauptkrümmungen.** Auf dem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, g_p)$ ist nach Satz 3 der Endomorphismus S_p selbstadjungiert. Es gilt daher das folgende Resultat der linearen Algebra:

Satz 5. *Sei (f,ν) durch U parametrisiertes Hyperflächenstück in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann existiert für jedes $p \in U$ eine g-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren für S_p mit Eigenwerten $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Die Eigenwerte sind unabhängig von der gewählten Parametrisierung.*

Allein die letzte Aussage bleibt zu zeigen. Laut (7) sind zwei Darstellungen S und $\tilde S = d\varphi^{-1} S\, d\varphi$ ähnlich. Aus der Eigenwertgleichung $Sv = \lambda v$ folgt also die Eigenwertgleichung $\tilde S(d\varphi^{-1}v) = d\varphi^{-1}Sv = \lambda(d\varphi^{-1}v)$.

Definition. Ein Eigenvektor $v(p) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von S_p heißt *Hauptkrümmungsrichtung* in p, der zugehörige Eigenwert $\kappa(p)$ eine *Hauptkrümmung*.

Für jeden Fußpunkt $p \in U$ haben wir damit einen Krümmungsbegriff, den ein Standardproblem der linearen Algebra liefert. In der Sprechweise der linearen Algebra gewinnen wir die Hauptkrümmungsrichtungen $v_1, \dots, v_n$ aus der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ durch Hauptachsentransformation der Bilinearform $b_p(X,Y)$.

Längs einer Hauptkrümmungsrichtung kippt die Normale mit Geschwindigkeit $-\kappa$; sie rotiert nicht.

Beispiele. 1. Auf dem Zylinder (8) mit $Se_1 = e_1$ bzw. $Se_2 = 0$ sind beide Koordinatenrichtungen Hauptkrümmungsrichtungen, und zwar zu den Hauptkrümmungen 1 bzw. 0.

2. Im Punkt $(0,0)$ des hyperbolischen Paraboloids (9) gilt $S_{(0,0)}e_1 = e_2$ und $S_{(0,0)}e_2 = e_1$. Es folgt $S(e_1 \pm e_2) = \pm(e_1 \pm e_2)$, so dass die beiden Diagonalen $e_1 \pm e_2$ die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt $(0,0)$ sind, und ± 1 ihre Hauptkrümmungen.

3. Die Fälle $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{S}^n_r$ sind degeneriert: Hier ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung mit Hauptkrümmung 0 bzw. $\frac{1}{r}$ (vgle. Aufgabe 15).

Bemerkung. Folgende allgemeine Tatsachen der linearen Algebra formulieren wir für unsere spezielle Situation:

1. *Zwei Hauptkrümmungsrichtungen X_1, X_2 zu verschiedenen Hauptkrümmungen $\kappa_1 \neq \kappa_2$ stehen aufeinander senkrecht bezüglich g.* In der Tat folgt aus

$$\kappa_1 g(X_1, X_2) = g(SX_1, X_2) = g(X_1, SX_2) = \kappa_2 g(X_1, X_2),$$

dass $g(X_1, X_2) = 0$.

2. Es sei ein Punkt $p \in U$ fixiert. Wir betrachten die kritischen Punkte der Normalkrümmung $X \mapsto g_p(SX, X) =: f(X)$, unter der Nebenbedingung, dass X in der g-Einheitssphäre $\{X \in \mathbb{R}^n \mid h(X) := \|X\|_p^2 = 1\}$ liegt. Nach dem Satz von Lagrange ist X kritisch genau dann, wenn $\operatorname{grad} f(X) = \lambda \operatorname{grad} h(X)$. Komponentenweise gilt also $df_X(e_i) = \lambda dh_X(e_i)$ für alle i. Durch Ausrechnen folgt

$$df_X(e_i) = \frac{d}{dt} g\big(S(X+te_i), X+te_i\big)\Big|_{t=0} = g\big(SX, e_i\big) + g\big(Se_i, X\big) = g\big(2SX, e_i\big),$$

und ebenso $dh_X(e_i) = \frac{d}{dt} g(X+te_i, X+te_i)\big|_{t=0} = g(2X, e_i)$. Weil diese beiden Gleichungen für alle $i = 1, \dots, n$ gelten, folgt daraus die Eigenwertgleichung $SX = \lambda X$. Wir haben erhalten: *Die kritischen Punkte X der Normalkrümmung f auf der g-Einheitssphäre sind also genau die Hauptkrümmungsrichtungen.* Insbesondere sind minimale und maximale Normalkrümmung gerade Hauptkrümmungen. Aus Bemerkung 2 folgt:

Satz 6. *Auf Flächen ($n = 2$) wird die Normalkrümmung in einer Hauptkrümungsrichtung minimal und in einer anderen (darauf senkrechten) maximal.*

Man kann den Satz aber auch ohne die Bemerkung beweisen:

Beweis. Sind $v_1 \perp_g v_2$ zwei Einheits-Hauptkrümmungsrichtungen, dann lautet die Normalkrümmung in Richtung $v_\alpha := \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2$

$$(17) \qquad g(Sv_\alpha, v_\alpha) = g(\kappa_1 \cos\alpha\, v_1 + \kappa_2 \sin\alpha\, v_2,\, \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2) = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \sin^2\alpha$$

(*Euler-Formel*). Als Funktion von α hat die Normalkrümmung also Maximum und Minimum gerade in den Richtungen $\pm v_1$ und $\pm v_2$. □

Definition. Eine reguläre Kurve $c = f \circ \gamma$ heißt
(*i*) *Krümmungslinie*, wenn γ' Hauptkrümmungsrichtung ist für alle t, bzw.
(*ii*) *Asymptotenlinie*, wenn für alle t die Normalenkrümmung verschwindet, $g(S\gamma', \gamma') = 0$.

Beispiele. 1. Eine Gerade in einer Hyperfläche ist stets Asymptotenlinie, denn $S\gamma' \perp_g \gamma'$.
2. Auf dem Zylinder sind Kreise und Geraden Krümmungslinien.
3. Auf $\mathbb{S}^n$ ist jede Kurve Krümmungslinie.
4. In $\mathbb{R}^n$ ist jede Kurve Krümmungs- und Asymptotenlinie.

3.2. Gauß- und mittlere Krümmung.

Definition. Es sei (f, ν) ein auf U parametrisiertes Hyperflächenstück. Für $p \in U$ seien $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$ die Hauptkrümmungen bzgl. einer Basis $v_1(p), \dots, v_n(p)$ von Hauptkrümmungsrichtungen. Die *Gauß-Krümmung* K ist das Produkt der Hauptkrümmungen, die *mittlere Krümmung* H ihr Mittelwert,

$$K(p) := \det S_p = \kappa_1(p) \cdot \ldots \cdot \kappa_n(p), \qquad H(p) := \frac{1}{n} \operatorname{Spur} S_p = \frac{1}{n}\big(\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_n(p)\big).$$

Bemerkung. Laut Satz 5 sind die Hauptkrümmungen κ_i von der gewählten Parametrisierung unabhängig; entsprechendes gilt auch für H, K. Die Gauß-Krümmung K ist eine Größe der inneren Geometrie und besitzt daher noch weitere erstaunliche Invarianzen. Bei Wechsel der Normalen ändert H sein Vorzeichen, aber K ändert das Vorzeichen nur in ungerader Dimension; für Flächen, $n = 2$, bleibt K invariant.

Beispiele. (vgl. Abschnitt 3.1): 1. Das Zylinderstück (8) mit innerer Normaler hat konstante Hauptkrümmungen 0 und 1. Also gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.
2. Auf dem hyperbolischen Paraboloid (9) hat man $\kappa_{1,2}(0,0) = \pm 1$. Daher ist $K(0,0) = -1$, $H(0,0) = 0$.
3. Für $\mathbb{S}^n_r$ mit innerer Normaler gilt $K \equiv (\frac{1}{r})^n$, $H \equiv \frac{1}{r}$; für $\mathbb{R}^n$ ist $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Aus (15) gewinnt man lokale Darstellungen, mit denen man H, K gewöhnlich ausrechnet:

Satz 7. *Die Hauptkrümmungsrichtungen sind die Eigenvektoren der Matrix $(g^{ik} b_{kj})_{1 \le ij \le n}$. Insbesondere haben Gauß- und mittlere Krümmung die Darstellung*

$$K = \det(g^{-1}b) = \det g^{-1} \det b = \frac{\det b}{\det g}, \qquad H = \frac{1}{n} \operatorname{Spur}(g^{-1}b) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i,j \le n} g^{ij} b_{ij}.$$

Speziell für $n = 2$ ist $g^{-1} = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$ und daher

$$H = \frac{1}{2 \det g}(g_{22} b_{11} - 2 g_{12} b_{12} + g_{11} b_{22}).$$

`9. Vorlesung, Montag 3.7.06`

Beispiel. Wir betrachten Punkte $p = (x, y)$ mit horizontaler Tangentialebene in einem Graphen $f(x, y) = \big(x, y, u(x, y)\big)$, d.h. $\nabla u(p) = 0$. Es gilt also $(g_{ij})_p = \delta_{ij}$ und $(b_{ij})_p = \partial_{ij} u(p)$, siehe Abschnitt 2.3. Für solche p erhalten wir daher

$$K(p) = \partial_{11} u\, \partial_{22} u - (\partial_{12} u)^2, \qquad H(p) = \frac{1}{2}\big(\partial_{11} u + \partial_{22} u\big) = \frac{1}{2} \Delta u.$$

Sind die Koordinatenrichtungen bereits Hauptkrümmungsrichtungen, so verschwindet bei K der Term $\partial_{12} u$. Für jeden Punkt einer beliebigen Fläche ist nach passender Drehung die Voraussetzung erfüllt, und man kann H, K wie angegeben effizient berechnen.

Auf Flächen nennt man Punkte p mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte*. Beispielsweise sind sämtliche Punkte von $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{R}^2$ Nabelpunkte. Um diesen Begriff ranken sich interessante offene Probleme. Eine Vermutung von Caratheodory sagt, dass jede konvexe Einbettung von $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ mindestens zwei Nabelpunkte besitzt. Eine Vermutung von Loewner sagt, dass isolierte Nabelpunkte von Flächen in $\mathbb{R}^3$ stets einen Index ≤ 1 haben; der Index isolierter Nabelpunkte gibt an, wie oft das Krümmungslinienvektorfeld um einen Nabelpunkt dreht (siehe [H], S.109). Diese Vermutungen sind bewiesen für den Fall, dass die Fläche analytisch ist, aber Beweise, die für geringere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gegeben worden sind, scheinen nicht richtig zu sein.

3.3. Beispiel: Rotationsflächen.

Es sei $(r, h)\colon I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine reguläre Kurve. Wir legen die Bildebene in die x,z-Ebene und rotieren sie um die z-Achse. Das Ergebnis ist die *Rotationsfläche*

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t, \varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi \\ r'\sin\varphi \\ h' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

ist die erste Fundamentalform g diagonal mit

$$g_{11} = r'^2 + h'^2, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Die Kurvensenkrechte $J\binom{r'}{h'} = \binom{-h'}{r'}$, normiert und um die z-Achse gedreht, ergibt die Flächennormale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{r'^2+h'^2}} \begin{pmatrix} -h'\cos\varphi \\ -h'\sin\varphi \\ r' \end{pmatrix}.$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$\partial_{11} f = \begin{pmatrix} r''\cos\varphi \\ r''\sin\varphi \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \partial_{22} f = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{12} f = \partial_{21} f = \begin{pmatrix} -r'\sin\varphi \\ r'\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$b_{11} = \langle \partial_{11} f, \nu\rangle = \frac{r'h''-h'r''}{\sqrt{r'^2+h'^2}}, \qquad b_{22} = \langle \partial_{22} f, \nu\rangle = \frac{rh'}{\sqrt{r'^2+h'^2}}, \qquad b_{12} = \langle \partial_{12} f, \nu\rangle = 0.$$

Weil sowohl g wie b diagonal sind, ist auch $g^{-1}b$ diagonal und die Koordinatenrichtungen $v_1 := e_t$, $v_2 := e_\varphi$ sind Hauptkrümmungsrichtungen, mit Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = g^{11} b_{11} = \frac{r'h''-h'r''}{\sqrt{r'^2+h'^2}^3}, \qquad \kappa_2 = g^{22} b_{22} = \frac{1}{r}\frac{h'}{\sqrt{r'^2+h'^2}}. \tag{18}$$

Wir berechnen abschließend K, H der Rotationsfläche, wenn die Kurve (r,h) nach Bogenlänge parametrisiert ist. Aus $r'^2+h'^2 = 1$ folgt $r'r''+h'h'' = 0$ und daher

$$K = \frac{r'h'h''-h'^2r''}{r} = \frac{-r'^2r''-h'^2r''}{r} = -\frac{r''}{r}, \qquad 2H = r'h''-h'r''+\frac{1}{r}h'.$$

Beispiel. Für $0 < \rho < R$ wird ein *Rotationstorus* erzeugt durch die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\big(r,h\big)(t) = \Big(R + \rho\cos\frac{t}{\rho},\ \rho\sin\frac{t}{\rho}\Big).$$

Wegen $r' = -\sin\frac{t}{\rho}$ und $r'' = -\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}$ folgt

$$K = \frac{\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}}{R+\rho\cos\frac{t}{\rho}}.$$

Es gilt $K = 0$ genau für $\frac{t}{\rho} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für alle anderen Punkte gilt: Auf der "Außenseite" des Torus ist $K > 0$, auf der "Innenseite" ist $K < 0$.

Wir wollen abschließend zeigen, wie man die Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche alternativ aus anschaulichen geometrischen Überlegungen gewinnen kann. Wir betrachten dazu die *Meridian*kurven $t \mapsto f(t,\varphi) =: m_\varphi(t)$ und die *Breitenkreise* $\varphi \mapsto f(t,\varphi) =: b_t(\varphi)$.

In jedem Schnittpunkt schneiden sich diese beiden Kurven senkrecht, so dass die drei Vektoren m'_φ, b'_t, ν eine orthogonale Basis bilden.

Jeder Meridian liegt in einer vertikalen Ebene $E_\varphi := \operatorname{span}\{\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2, e_3\}$. Eine Spiegelung an E_φ erhält die Rotationsfläche und ihre Flächennormalen $t \mapsto \nu(t,\varphi)$. Also gilt $\nu(t,\varphi) \in E_\varphi$ und auch $d\nu(e_t) \in E_\varphi$. Damit steht $d\nu(e_t)$ senkrecht auf b'_t und –ohnehin– auf ν. Es muss daher $d\nu(e_t) \parallel df(e_t)$ gelten, d.h. e_t ist Hauptkrümmungsrichtung und jeder Meridian m_φ Krümmungslinie. Weil die Breitenkreise b_t senkrecht auf den Meridianen stehen, müssen auch sie Hauptkrümmungslinien sein (wie sieht man dies direkt?).

Die Hauptkrümmungen bestimmen wir nun als Normalkrümmungen der Meridiane $m_\varphi(t)$ bzw. der Breitenkreise $b_t(\varphi)$. Bestätigen wir die erste Identität von (18):

$$\kappa_1 = \text{Normalkrümmung}\big(t \mapsto m_\varphi(t)\big) \overset{m_\varphi \text{ eben}}{=} \text{Krümmung}\big(t \mapsto (r(t), h(t))\big)$$
$$\overset{\text{Satz } I,3}{=} \frac{1}{|(r',h')|^3}\det\Big(\begin{pmatrix} r' \\ h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r'' \\ h'' \end{pmatrix}\Big)$$

Die zweite zeigt man wie folgt. Die Breitenkreise sind ebene Kurven mit innerem Krümmungsvektor $(-\frac{1}{r(t)}, 0)$. Diesen Vektor müssen wir auf die innere Normale projizieren. Weil das Ergebnis von φ nicht abhängt, tun wir dies für $\varphi = 0$ in E_0:

$$\kappa_2 = \text{Normalkrümmung}\big(\varphi \mapsto b_t(\varphi)\big) = \Big\langle \begin{pmatrix} -1/r \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{h'^2+r'^2}}\begin{pmatrix} -h' \\ r' \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Unsere geometrischen Argumentation macht Folgendes sofort klar: 1. Es gilt $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ genau für Punkte mit $r' = 0$ und 2. es gilt $\kappa_2 = 0$ genau für Punkte mit $h' = 0$.

4. Lokale Normalform und Deutung der Gauss-Krümmung

4.1. Lokale Normalform: Hauptkrümmungen als Koeffizienten der Taylorreihe. Flächen kann man lokal als Graph über ihrer Tangentialebene schreiben. Wir verallgemeinern zunächst die Darstellung I(16) von Kurven.

Lemma 8 (Lokaler Graph). *Es sei (f,ν) ein durch U parametrisiertes Hyperflächenstück in $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner sei $p \in U$, $P := f(p)$, $N := \nu(p)$.*
Dann gibt es ein Gebiet $V \subset T_pf$ mit $0 \in V$ und eine Parametertransformation $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset U$, mit $\varphi(0) = p$, so dass für $\tilde f := f \circ \varphi$ gilt

$$\tilde f(X) = P + X + u(X)N \quad \textit{für alle } X \in V \subset T_pf. \tag{19}$$

Die Höhenfunktion $u\colon V \to \mathbb{R}$ ist glatt mit $u(0) = 0$ und $du_0 = 0$.

`10. Vorlesung, Montag 10.7.06`

Beweis. Es sei $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to T_pf$ orthogonale Projektion auf den Tangentialraum, d.h. $\pi(x) = x - \langle x, \nu(p)\rangle \nu(p)$. Die Abbildung

$$\psi := \pi \circ (f - P)\colon U \to T_pf$$

projiziert $f - P$ orthogonal auf den Tangentialraum. Speziell in p gilt

$$\psi(p) = 0, \qquad d\psi_p = d\pi \circ df_p \overset{\pi \text{ linear}}{=} \pi \circ df_p \overset{df_p(\mathbb{R}^n)=T_pf}{=} df_p.$$

Nach Lemma 1 ist $df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_pf$ ein Isomorphismus; also gilt dies auch für $d\psi_p$. Der Umkehrsatz, angewendet auf ψ in p, ergibt daher eine Umgebung V von 0 in T_pf, und eine lokale Umkehrabbildung $\varphi\colon V \to U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.

Zerlegen wir nun $\tilde f := f \circ \varphi\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal in Normal- und Tangentialanteil und definieren $u\colon V \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde f(X) - P = v + u(X)N \in T_pf \oplus N_pf.$$

so liefert dies (19). Klarerweise gilt $u(0) = 0$. Wir zeigen abschließend $du_0 = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt $d\tilde f_0(X) = \frac{d}{dt} f_0(0 + tY)|_{t=0} = Y + du_0(Y)\,N$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$; es gilt also $d\tilde f_0 = \mathrm{id} + du_0\,N$. Wegen

$$d\tilde f_0 = df_p \cdot d\varphi_0 = df_p \cdot (d\psi_p)^{-1} = \mathrm{id} \tag{20}$$

folgt $du_0\,N = 0$ und damit $du_0 = 0$. $\square$

Aus (20) folgern wir noch, dass $\tilde g_0(\cdot,\cdot) = \langle d\tilde f_0\,\cdot, d\tilde f_0\,\cdot\rangle = \langle \cdot,\cdot\rangle$. Eine $\tilde g_0$-Orthonormalbasis von T_pf ist daher auch orthonormal bezüglich $\langle .,.\rangle$.

Nun können wir die Darstellung I(15) von Kurven auf Flächen verallgemeinern:

Satz 9 (Lokale Normalform)**.** *Es seien f und $\tilde f$ wie im Satz. Bezüglich einer Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von T_pf aus Hauptkrümmungsrichtungen, deren Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ seien, hat man folgende Darstellung:*

$$\tilde f(X) = P + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \kappa_i X^i X^i + O(|X|^3)\Big)N \qquad \textit{für alle} \quad X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in V, \tag{21}$$

wobei $P := \tilde f(0) = f(p)$, $N := \tilde\nu(0) = \nu(p)$.

Beweis. Wir benutzen die Taylorentwicklung von u um 0:

$$u(X) = \underbrace{u(0)}_{=0} + \underbrace{du_0}_{=0}(X) + \frac{1}{2} d^2u_0(X,X) + O(|X|^3)$$

Wir wollen nun die Hesseform d^2u_0 durch die Hauptkrümmungen ausdrücken. Laut (19) gilt $d^2\tilde f_0(X,Y) = d^2u_0(X,Y)N$. Durch Bildung des Skalarprodukts mit $N = \tilde\nu(0)$ folgt

$$\begin{aligned} d^2u_0(X,X) &= \Big\langle d^2\tilde f_0(X,X),\, \tilde\nu(0)\Big\rangle \overset{(10)}{=} \tilde g_0(\tilde S X, X) \\ &= \tilde g_0\Big(\textstyle\sum_i \kappa_i X^i v_i,\, \sum_j X^j v_j\Big) \overset{v_k \text{ ONB}}{=} \displaystyle\sum_i \kappa_i X^i X^i. \end{aligned}$$

Daraus folgt (21). $\square$

Man nennt die Punktmenge

$$\Big\{ f(p) + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \kappa_i(p) X^i X^i\Big)\nu(p) \mid X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in T_pf \Big\}$$

das *Schmiegparaboloid* von f in p. Es charakterisiert das Verhalten einer Hyperfläche bis zur zweiten Ordnung, so wie es Schmiegkreise für Kurven tun. Speziell für Dimension $n = 2$ folgern wir:

Satz 10. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$.*
(i) Gilt $K(p) < 0$, dann ist $f(p)$ Sattelpunkt, d.h. in jeder Umgebung von p findet man Punktepaare, deren Bilder auf zwei verschiedenen Seiten (Zusammenhangskomponenten) von $f(p) + T_pf$ liegen.
(ii) Gilt $K(p) > 0$, dann ist f lokal konvex, d.h. es gibt eine Umgebung V von $f(p)$, so dass für alle $q \in V$ die Punkte $f(q)$ die eine Seite von $f(p) + T_pf$ nicht treffen.

Beachten Sie, dass wir im Fall $K(p) = 0$ keine Aussage treffen; tatsächlich könnte jede der beiden Fälle eintreten (Beispiele?).

Beweis. (*i*) Bis auf Numerierung gilt $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 < 0$. Für kleines $t \neq 0$ liegen nach (21) die Punkte tv_1 (in Richtung der ersten Hauptkrümmungsrichtung) auf derjenigen Seite von $f(p) + T_pf$ in die ν zeigt, und Punkte tv_2 (in Richtung der zweiten Hauptkrümmungsrichtung) auf der entgegengesetzten Seite.

(*ii*) κ_1 und κ_2 haben das gleiche Vorzeichen. Der quadratische Term von (21) dominiert dann den $O(|X|^3)$-Term auf einer Umgebung von 0, und daher liegen alle Bilder einer solchen Umgebung zu einer Seite des Tangentialraums. $\square$

Beispiel. Der Torus hat zwei berührende Ebenen senkrecht zur Rotationsachse, die den Torus jeweils in einem Kreis schneiden. Entfernen wir diese beiden Kreise, so erhalten wir zwei Zusammenhangskomponenten. Die eine, auf der Innenseite, besteht nur aus Sattelpunkten; daher gilt dort $K \leq 0$. Auf der anderen, der Außenseite, ist der Torus lokal konvex, und daher gilt $K \geq 0$. Dass diese Ungleichungen strikt sind, kann man ohne Rechnen nicht sehen. Auf jeden Fall gilt aber in den Kreisen $K = 0$, denn die Gauß-Krümmung ist stetig.

4.2. **Die Gauß-Krümmung kompakter Hyperflächen.** Als Anwendung der lokalen Normalform zeigen wir den folgenden Satz.

Satz 11. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M := \partial A$. Dann gibt es einen Punkt $P \in M$, für den alle Hauptkrümmungen positiv sind; insbesondere ist die Gauß-Krümmung positiv.*

Wie in Analysis 3 gezeigt, lässt sich eine implizit gegebene Menge M lokal als parametrisiertes Flächenstück $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ darstellen. Dabei ist f sogar Einbettung, und deshalb ist der Tangentialraum T_pf des Flächenstücks gerade der Tangentialraum T_PM der Mannigfaltigkeit M in $P = f(p)$.

Beweis. Auf der kompakten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nimmt die stetige Funktion $|x|$ ein Maximum R in einem Punkt $P \in M$ an, d.h.

$$\exists P \in \mathbb{S}^n_R \cap M \quad \text{mit} \quad M \subset \overline{B_R} := \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \leq R\big\}.$$

Im Punkt P hat ∂B_R die Tangentialebene $P^\perp$. Wir behaupten, dass $P^\perp$ auch die Tangentialebene von M in P ist. Wenn nicht, gäbe es ein $X \in T_pM$ mit $\langle X, P\rangle \neq 0$. Ersetzen wir gegebenfalls X durch $-X$, so folgt $\langle X, P\rangle > 0$. Aus der lokalen Normalform (21) erhalten wir die für kleine t gültige Darstellung

$$\tilde f(tX) = P + tX + O(t^2)N \quad \Rightarrow \quad |\tilde f(tX)|^2 = R^2 + 2t\langle P, X\rangle + O(t^2).$$

Dies ergibt

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\geq} \frac{|\tilde f(tX)|^2 - R^2}{t} = 2\langle P, X\rangle + O(t);$$

die rechte Seite ist aber positiv für kleine $t > 0$, ein Widerspruch. Dies zeigt $T_PM = T_P(\partial B_R) = P^\perp$.

Im Punkt P können wir also die innere Normale $N := -\frac{P}{|P|}$ als Normale beider Flächen wählen. Wir verwenden erneut die Normalform (21): Sei $\tilde f$ die Normalform von M und $\tilde s$ die der Sphäre. Dann sind die Parametrisierungen $\tilde f$ und $\tilde s$ auf einer geeignet kleinen Umgebung $V \subset T_PM = T_P\mathbb{S}_R = P^\perp$ von 0 definiert und es gilt

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\leq} \big\langle \tilde f - \tilde s,\, N\big\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\kappa_i - \frac{1}{R}\Big)X^iX^i + O\big(|X|^3\big) \qquad \text{für alle } X = \sum X^i v_i \in V.$$

Daraus folgt $\kappa_i \geq \frac{1}{R}$ für jedes $1 \leq i \leq n$ und insbesondere $K \geq \frac{1}{R^n} > 0$. □

Bemerkung. Im Satz haben wir $M = \partial A$ vorausgesetzt, damit M eingebettet ist. Allerdings haben wir diese Tatsache im Beweis nicht wirklich benutzt. Tatsächlich gilt der Satz auch noch für immersierte Untermannigfaltigkeiten, d.h. M darf das Bild einer Immersion einer kompakten Mannigfaltigkeit sein.

Übung: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Kurven.

Eine *Minimalfläche* ist definiert als eine Fläche mit $H \equiv 0$. Man kann zeigen, dass jede Fläche mit Rand, die den Inhalt minimiert (z.B. bei festen Randbedingungen), tatsächlich $H \equiv 0$ erfüllt. Offenbar können für eine Minimalfläche, die ein Kompaktum berandet, nicht alle Hauptkrümmungen dasselbe Vorzeichen haben und daher folgt:

Korollar 12. *Eine Minimalfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ kann nicht kompakt sein.*

4.3. **Gauß-Krümmung als Verzerrung der Gauß-Abbildung.** Für nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven hatten wir in I(5) gesehen, dass $\nu' = -\kappa c'$ gilt; nach der Substitutionsregel stimmt dies sogar für reguläre Kurven. Die Kurve c bildet ein kleines Intervall des Definitionsbereichs auf ein Kurvenstück ab, dessen Länge in erster Ordnung um den Faktor $|c'|$ gestreckt ist. Wir sehen diesen Faktor als Längenverzerrung der Kurve an. Entsprechend ist das Normalbild $\nu(t)$ eine Kurve in $\mathbb{S}^1$, die Urbildlängen um den Faktor $|\nu'|$ verzerrt. Daher können wir die Gleichung $\nu' = -\kappa c'$ deuten als

$$|\kappa(t)| = \frac{|\nu'(t)|}{|c'(t)|} = \frac{|\text{Längenverzerrung von } \nu \text{ in } t|}{|\text{Längenverzerrung von } c \text{ in } t|}.$$

Ganz ähnlich hat Gauß $K(p)$ definiert, und zwar als den Quotienten

$$\frac{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } \nu \text{ in } p|}{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } f \text{ in } p|}.$$

Im Spezialfall einer linearen Abbildung ℓ ist der Verzerrungsfaktor des Flächeninhalts gerade durch $|\det \ell|$ gegeben. Weil f in erster Ordnung durch df approximiert wird, ist der Nenner des Ausdrucks daher gerade $|\det df_p|$; entsprechend der Zähler $|\det d\nu_p|$. Wir erhalten also für den Quotienten

$$\frac{|\text{Verzerrung von } d\nu_p\colon \mathbb{R}^n \to T_pf|}{|\text{Verzerrung von } df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_pf|} = \frac{|\det d\nu_p|}{|\det df_p|} = \big|\det\big((df_p)^{-1}d\nu_p\big)\big| = |\det S_p| = |K(p)|.$$

Unsere Definition stimmt daher tatsächlich mit der von Gauß überein, jedenfalls im Betrag. Im Kurven- wie im Flächenfall kann man die Gleichungen aber auch ohne Betragsstriche aufstellen, wenn man die Orientierung richtig berücksichtigt; in beiden Fällen verbleibt dann ein Minuszeichen in den Gleichungen.

Beispiele. 1. Für $\mathbb{S}^n$ ist $\nu = -f$; aus obiger Eigenschaft folgt $|K| = 1$.
2. Für den Zylinder ist das Gaußbild ein Großkreis von $\mathbb{S}^2$, also niederdimensional. Der Flächeninhalt wird also unter ν auf das 0-fache verzerrt, und $K \equiv 0$ folgt. Ebenso für die Ebene.

`11. Vorlesung, Montag 10.7.06` ______________________

5. Übungsaufgaben

5.1. **Parametrisierte Flächen.**

Aufgabe 1 – Tangential- und Normalraum (Reif 08):

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Hyperfläche, $\tilde f = f\circ\varphi$ eine Umparametrisierung, $p\in U$ und $\tilde p = \varphi^{-1}(p)$.

a) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum eine Eigenschaft von $[f]$ ist, d.h. $T_pf = T_{\tilde p}\tilde f$.
b) Zeigen Sie, dass der orientierte Normalenvektor eine Eigenschaft von $\langle f\rangle$ ist, d.h. $\nu(p) = \tilde\nu(\tilde p)$ falls $\det D\varphi > 0$.

Aufgabe 2 – Katenoid und Helikoid sind isometrisch (GB 02):

Zwei Immersionen $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$k(x,y) := (\cosh x\cos y, \cosh x \sin y, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x\sin y, -\sinh x\cos y, y).$$

Man nennt k das *Katenoid* und h das *Helikoid*.

a) Skizzieren Sie beide Flächen.
Tipp: Was sind die Parameterlinien $x\mapsto k(x,y)$ bzw. $h(x,y)$ sowie $y\mapsto\ldots$?
b) Zeigen Sie, dass ihre beiden ersten Fundamentalformen übereinstimmen.

Aufgabe 3 – Parametrisierungen der Sphäre (GB 02):

Gegeben sei die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ sowie die beiden Parametrisierungen

$$k(x,y) := (\cos x\cos y, \cos x\sin y, \sin x) \quad \text{für } (x,y)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi),$$

$$s(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \quad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Man nennt k Parametrisierung in *Kugelkoordinaten* und s die Parametrisierung durch *stereographische Projektion.*

a) Zeigen Sie, dass sowohl k als auch s Teilmengen von $\mathbb{S}^2$ parametrisieren. Welche Teilmengen sind dies?
b) Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen Immersionen sind, d.h. dk_p und ds_p besitzen vollen Rang für alle p im jeweiligen Definitionsbereich.
c) Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen injektiv sind.
d) Im Punkt $(1,0,0)\in\mathbb{S}^2$ ist $v := (0,1,0)$ ein Tangentialvektor an $\mathbb{S}^2$. Suchen Sie den entsprechenden Vektor im Urbild, d.h. finden Sie X mit $v = df_p(X)$ für $f = k$ bzw. $f = s$.
e) Es sei $N := (0,0,1)$ der Nordpol von $\mathbb{S}^n$. Zeigen Sie, dass die stereographische Abbildung s durch folgendes geometrische Verfahren beschrieben wird. Ein Punkt (x,y) wird auf denjenigen Punkt der Geraden $\{\lambda(x,y) + (1-\lambda)N \mid \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ abgebildet, der auf $\mathbb{S}^2$ liegt.

Aufgabe 4 – Kugelkoordinaten (Reif 08):

Die Standard-Parametrisierung einer Kugel mit Radius r um den Ursprung lautet

$$k(u,v) = \begin{bmatrix} r\cos u\cos v\\ r\sin u\cos v\\ r\sin v\end{bmatrix}, \quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi,2].$$

Eine *Loxodrome* ist eine Kurve auf der Kugel, deren Winkel zu den Parameterlinien von k konstant ist.

a) Betrachten wir speziell die Erdkugel. Identifizieren Sie die Parameterlinien von k mit Längen- und Breitenkreisen. Wie erhält man den Äquator, Nord- und Südpol? Diskutieren Sie die Bedeutung von Loxodromen für die Schifffahrt.
b) Ist k eine Immersion?
c) Sei
$$c(t) = [u(t),\, v(t)] = [\ln\cot(\pi/4 - t/2),\, t], \quad t\in(-\pi/2,\pi/2).$$
Skizzieren Sie die Koordinatenfunktion $u(t)$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Flächenkurve $k\circ c$ um eine Loxodrome mit Richtung "‘Nord-Ost“’ handelt.
Hinweis: Im Verlauf der Rechnung kann die Formel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ nützlich sein.
d) Berechnen Sie die Länge von $k\circ c$.

Aufgabe 5 – Rotationsflächen (Bergner 04):

Gegeben ist die Kurve $c(t) = (r(t), h(t)) : [a,b] \to (0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Wir legen diese Kurve in die x,z-Ebene des $\mathbb{R}^3$ und rotieren diese Kurve um die z-Achse. Dann erhält man die Rotationsfläche

$$f(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)) \quad \text{für } (t,\varphi)\in[a,b]\times[0,2\pi]\ .$$

a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ der Rotationsfläche. Welche Bedingung muss die Kurve c erfüllen, damit f eine Immersion ist?
b) Mit Hilfe des Oberflächenelementes (Gramsche Determinante) kann man bekanntlich den Flächeninhalt wie folgt berechnen:
$$A := \int_a^b\int_0^{2\pi}\sqrt{\det(g_{ij}(t,\varphi))}\,d\varphi dt\ .$$
Leiten Sie daraus eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes von Rotationsflächen her.
c) Gemäß der *ersten Guldinsche Regel* ist der Flächeninhalt der Spur von f gleich dem Produkt aus der Länge von c und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve c bei der Rotation beschreibt. Erklären Sie diese Regel anhand des Resultats aus Teil b).
d) Sei nun c ein Kreis um den Punkt $(R,0,0)$ mit Radius $r<R$, dann parametrisiert f einen *Torus.* Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt ohne Rechung.

Aufgabe 6 – Paralleler Rahmen und Röhrenflächen (GB 96):

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir betrachten einen orthonormalen Rahmen $\big(e_1(t) := c'(t),\, e_2(t), e_3(t)\big)$, der für alle $t \in [a,b]$ orthonormal ist. Es sei $E(t)$ die 3×3-Matrix mit Zeilen $e_i(t)$.

a) Wie bei Frenet-Kurven schreiben wir die Abgleichungsgleichungen als ein System $E' = KE$ auf. Zeigen Sie, dass K stets die Form $K = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ hat, wobei α, β, γ Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ sind.
b) Wir betrachten nun *Röhrenflächen*
$$F_\varepsilon\colon U := [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad F_\varepsilon(t,\varphi) := c(t) + \varepsilon\big(\cos\varphi\, e_2(t) + \sin\varphi\, e_3(t)\big).$$
Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, abhängig von α, β, γ, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Abbildung F_ε eine Immersion darstellt. Wir setzen von nun an $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ voraus.
c) Charakterisieren Sie nun die Tatsache, dass die Parameterlinien von F_ε senkrecht aufeinander stehen, d.h. $0 = g\big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\big)_p$ für jedes $p \in U$, durch eine Bedingung an die Matrix K.
d) Zeigen Sie: Für jede Kurve c kann man einen orthonormalen Rahmen $(e_1 = c',\, v, w)$ finden, so dass die Parameterlinien von F_ε aufeinander senkrecht stehen. Hierzu drücken Sie zunächst v und w bezüglich des gegebenen Rahmens E aus, und lösen dann eine Differentialgleichung.
Bemerkung: Weil v und w so wenig wie möglich längs c rotieren, kann man sich vorstellen, dass man $v(t_0)$, $w(t_0)$ so gut, wie es nur geht, parallel verschiebt, um $v(t), w(t)$ zu erhalten. Man nennt (c', v, w) daher einen *parallelen Rahmen*.

5.2. **Gauß-Abbildung.**

Aufgabe 7 – Gauß-Abbildung einer impliziten Hyperfläche (Bergner 04):

Zu $U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Hyperfläche $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n+1})$ mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Menge $f(U)$ werde implizit beschrieben durch eine Abbildung $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, d.h.
$$f(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in f(U)\ .$$

a) Geben Sie die Einheitssphäre und eine Ursprungsebene durch 0 mit Normale ν in impliziter Form an.
b) Zeigen Sie: Für jedes $p \in U$ steht der Vektor $\nabla\varphi(f(p))$ senkrecht auf allen Tangentialvektoren $df_p(X) \in T_p f$.
c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\nu(x) := \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$ stetig nach $\mathbb{S}^n$ abbildet und somit eine Gauß-Abbildung ist.
d) Falls zusätzlich $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ gilt, wie glatt ist dann die Abbildung ν?

Zusatz: Kann man zu jeder Hyperfläche f eine implizite Darstellung φ mit obigen Eigenschaften konstruieren?

Aufgabe 8 – Parallelflächen (GB 02):

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ Hyperflächenstück, so definieren wir die *Parallelfläche* im Abstand s durch
$$f^s\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad f^s(p) := f(p) + s\nu(p).$$

a) Falls f^s Immersion ist, so ist durch ν eine Gauß-Abbildung von f^s gegeben.
b) Berechnen Sie die erste Fundamentalform g^s von f^s aus $g =: g^0$.
c) Drücken Sie $\frac{\partial}{\partial s} g^s(X,Y)\big|_{s=0}$ durch die zweite Fundamentalform von f aus.
d) Zeigen Sie: Für jede kompakte Umgebung $p \in V \subset\subset U$ gibt es ein $s_0 > 0$, so dass die Parallelfläche $f^s\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion darstellt für alle $|s| < s_0$.
Tip: Sie müssen nur $g^s_p(X,X) > 0$ für $p \in V$ und $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ zeigen.

5.3. **Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.**

Aufgabe 9 – Krümmungen am Beispiel (Bergner 04):

Wählen Sie sich einen gekrümmten Körper, z.B. eine Kaffeetasse, einen Stift, Ihren Stuhl, etc. Versuchen Sie die Gebiete mit $K > 0$ und $K < 0$ voneinander abzugrenzen. Können Sie in ausgewählten Punkten auch die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmen?

Aufgabe 10 – Umparametrisierung (Reif 08):

Sei $\tilde f := f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von f. Zeigen Sie: Wenn v eine Hauptkrümmungsrichtung von f ist, dann gibt es eine Hauptkrümmungsrichtung $\tilde v$ von $\tilde f$ mit $df\, v = d\tilde f\, \tilde v$.

Aufgabe 11 – Skalierung von Flächen (Bergner 04):

Zu einer Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n+1})$ betrachten wir die skalierte Fläche $f_\lambda(p) := \lambda f(p)$ zu einem $\lambda > 0$. Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform von f_λ und daraus mittlere und Gaußkrümmung von f_λ in Abhängigkeit von f.

Aufgabe 12 – Bewegungsinvarianz (Reif 08):

Sei A eine orthogonale Matrix, q ein Vektor und $\hat f := Af + q$ die Fl“ache, die durch die zugeh”orige Bewegung aus f hervorgeht. Zeigen Sie:

a) Wenn ν eine Gauss-Abbildung von f ist, dann ist $\hat\nu := A\nu$ eine Gauss-Abbildung von $\hat f$.
b) Mit $\hat\nu = A\nu$ gilt $S = \hat S$.

Aufgabe 13 – Normal- und geodätische Krümmung (GB 05):

Wir betrachten Kurven auf dem Einheitszylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Was ist die innere Normale im Punkt $(x,y,z) \in Z$?

b) Wählen Sie (α, β), so dass die Schar von Helices $c(t) = (\cos \alpha t, \sin \alpha t, \beta t)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.
c) Berechnen Sie Normal- und geodätische Krümmung. Für welche Kurven ist die Normalkrümmung extremal?

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe ohne Parametrisierung der Fläche auskommen: nur eine Parametrisierung der Kurve wird gebraucht, um deren Krümmungen auszurechnen.

Aufgabe 14 – Katenoid und Helikoid sind minimal (GB 02):

Wir betrachten wieder Katenoid und Helikoid $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$k(x,y) := (\cosh x\, \cos y,\, \cosh x\, \sin y,\, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x\, \sin y,\, -\sinh x\, \cos y,\, y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Gaussabbildungen ν für k und h übereinstimmen.
b) Berechnen Sie $\partial_1 \nu$ und $\partial_2 \nu$ und daraus die Weingartenabbildungen.
c) Ermitteln Sie nun die Hauptkrümmungen sowie mittlere und Gausskrümmung dieser Flächen.

Aufgabe 15 – Weingartenabbildung der Sphäre (Bergner 04):

Gegeben ist die Sphäre $\mathbb{S}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p| = r\}$ vom Radius r.

a) Zeigen Sie: Für jede beliebige Parametrisierung $f : U \to \mathbb{S}^n_r$ ist $\nu(p) := \frac{1}{r} f(p)$ eine Gaussabbildung.
b) Ermitteln Sie nun die Weingartenabbildung und daraus mittlere sowie Gausskrümmung von $\mathbb{S}^n_r$.

Aufgabe 16 – Mittlere Krümmung von Graphen (Bergner 04):

Die Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ sei ein Graph über der x, y-Ebene, dass heisst $f(x,y) = (x, y, u(x,y))$ für ein $u \in C^2(U, \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform in Abhängigkeit von u.
b) Ermitteln Sie die mittlere Krümmung $H(x,y)$ der Fläche f in Abhängigkeit von u.
c) Zeigen Sie nun, dass die nichtlineare elliptische Differentialgleichung

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 2H(x,y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } U \tag{22}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 17 – Hyperbolisches Paraboloid (GB 02):

Wir untersuchen das *hyperbolische Paraboloid*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x, y, xy).$$

a) Zeigen Sie: Durch jeden Punkt $f(x,y)$ gehen zwei verschiedene Geraden, welche auf der Fläche liegen. Diese Geraden sind Asymptotenlinien.
Bemerkung: Daher gibt es von Geraden berandete Vierecke auf dem Paraboloid, und diese Vierecke werden selbst von zwei Geradenscharen geblättert. Aus diesem Grund setzen Architekten diese Fläche gern als gekrümmte Dachfläche ein.
b) Eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ besitze im Punkt $f(x,y)$ eine Asymptotenlinie.
Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel, dass die Gausskrümmung $K(x,y) \le 0$ erfüllt.
Insbesondere gilt also $K(x,y) \le 0$ auf dem hyperbolischen Paraboloid.
c) Parametrisieren Sie um: Wir bezeichnen die Höhenfunktion mit $u(x,y) := xy$. Es sei $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y}, -\tilde{x} + \tilde{y})$ eine 45-Grad-Drehung. Was ist $\tilde{u} := u \circ \varphi$? Deuten Sie (x, y, h) und $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h})$ im Sinne des Satzes über die lokale Normalform.

Aufgabe 18 – Hyperbolisches Paraboloid (Reif 08):

Gegeben seien die beiden Flächen $f(u,v) = [u, v, u^2/2 \pm v^2/2]^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie jeweils

a) die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingarten-Abbildung in Matrixdarstellung;
b) die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 sowie Gausskrümmung K und mittlere Krümmung H;
c) die Hauptkrümmungsrichtungen $v_i, i \in \{1,2\}$, sowie die zugehörigen Vektoren $w_i := df v_i$ im Tangentialraum;
d) den Grenzwert $\lim_{(u,v)\to(0,0)} w_i(u,v)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 19 – Affensattel (GB 02):

Wir betrachten den Graphen $f(x,y) := \big(x, y, u(x,y)\big)$ mit $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$.

a) Der Graph ist invariant unter Drehspiegelung um 60 Grad um die z-Achse, d.h. für $R(\varphi) := \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ gilt $u \circ R(\frac{\pi}{3}) = -u$. (Es ist am einfachsten, dafür $u(2R(x,y)) = -u(2x, 2y)$ zu zeigen.)
b) Wir wollen nun den Graphen f verstehen. Notieren Sie in einer Skizze der (x,y)-Ebene zuerst die Funktionswerte von u entlang der Geraden $y \mapsto (0,y)$, sowie diejenigen auf den um Vielfache von 60 Grad rotierten Geraden. Berechnen Sie dann $u(x,0)$ und halten Sie auch diese Werte in der Skizze fest, zusammen mit den Werten auf den rotierten Geraden. Warum heißt die Fläche *Affensattel*?
c) Überlegen Sie zuerst, welchen Wert die Hauptkrümmungen im Punkt $(x,y) = 0$ haben können (denken Sie an die lokale Normalform!). Rechnen Sie dies dann nach, wobei Sie die Formel für die zweite Fundamentalform eines Graphen mit horizontaler Tangentialebene verwenden.
d) Zeigen Sie, dass der Graph spiegelsymmetrisch zur (x,z)-Ebene ist. Folgern Sie daraus, dass $x \mapsto f(x,0)$ eine Krümmungslinie ist. Das gleiche gilt nach Drehungen um Vielfache von 60 Grad. Es gehen daher drei verschiedene Krümmungslinien durch den Nullpunkt.

Aufgabe 20 – Hauptkrümmung und Symmetrie:

Es sei $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales Flächenstück. Wir nehmen an, dass der Ursprung $f(p) = 0$ in der Fläche liegt und der Tangentialraum T_pf die xy-Ebene ist.

a) Es sei $R_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um 120° um die z-Achse. Zeigen Sie: Ist $f(U)$ invariant unter der Drehung R, so stimmen die Hauptkrümmungen in p überein. Man sagt, der Punkt p ist ein *Nabelpunkt [umbilic]*.
b) Gilt das Ergebnis von Teil a) für jede Drehung R_k vom Winkel $2\pi/k$ mit $k = 2, 3, \ldots$?
c) Sei $R_6\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um 60° um die z-Achse und S die Spiegelung an der xy-Ebene. Zeigen Sie: Ist $f(U)$ invariant unter $R_{\overline{6}} := S \circ R_6$, so verschwinden beide Hauptkrümmungen in p. Man sagt, der Punkt p ist ein *Flachpunkt*.
d) Geben Sie ein Beispiel einer (nicht rotationssymmetrischen) Fläche wie in Teil a). Genügt sie auch Teil c)?

Aufgabe 21 – Flächen, die ganz aus Nabelpunkten bestehen (GB 02):

Auf Flächen $(n = 2)$ nennt man Punkte p mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte*. Offenbar bestehen $\mathbb{S}^2_r$ und $\mathbb{R}^2$ ganz aus Nabelpunkten. In dieser Aufgabe beweisen wir die Umkehrung dieser Feststellung: *Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, für die jedes $p \in U$ ein Nabelpunkt ist, also $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) =: \kappa(p)$. Dann ist $f(U)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre $\mathbb{S}^2_r$ mit $r > 0$ enthalten.*

a) Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion κ konstant auf U ist. Berechnen Sie dazu $\partial_{12}\nu(p) - \partial_{21}\nu(p)$, und schließen Sie daraus $0 = \partial_1\kappa(p) = \partial_2\kappa(p)$. Warum zeigt dies, dass κ konstant ist?
b) Zeigen Sie, dass im Falle $\kappa(p) \equiv 0$ die Parametrisierung in einer Ebene liegt.
c) Nun wollen wir zeigen, dass im Fall $\kappa(p) \equiv \kappa \neq 0$ die Fläche $f(U)$ in einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{\kappa}$ liegt. Zeigen Sie dazu durch Differentiation, dass $f(p) + \frac{1}{\kappa}\nu(p)$ konstant ist und daher den Mittelpunkt der gesuchten Sphäre definiert.

Aufgabe 22 – Regelflächen (GB 02):

Es sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ glattes Vektorfeld. Die Fläche

$$f\colon (\alpha, \beta) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(s, t) := c(t) + sV(t).$$

nennt man *Regelfläche*.

a) Zeigen Sie, dass Zylinder und Kegel Regelflächen sind. Welche weiteren Beispiele von Regelflächen kennen Sie?
b) Zeigen Sie: Das Bild einer Regelfläche unter einer linearen Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wieder Regelfläche.
c) Es seien die Vektoren $c'(t)$ und $V(t)$ für $t \in [a, b]$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist. Wir setzen dies von nun an voraus.

d) Zeigen Sie $K(s, t) \leq 0$ für die Gausskrümmung der Regelfläche. Warum gilt $K(s, t) < 0$ genau dann, wenn die Vektoren $V(t), V'(t), c'(t)$ linear unabhängig sind?
e) Eine Regelfläche hat Gauß-Krümmung $K \equiv 0$ genau dann, wenn die Normale ν längs jeder Regelgeraden konstant ist.

Aufgabe 23 – Rotationsfläche der Traktrix (GB 02):

Wir betrachten die Traktrix

$$(r, h)(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \quad \text{für } t > 0$$

und untersuchen nun die von ihr erzeugte Rotationsfläche $f(t, \varphi) = \big(r(t) \cos\varphi, r(t) \sin\varphi, h(t)\big)$.

a) Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 dieser Fläche.
b) Zeigen Sie nun, dass die Gausskrümmung dieser Fläche konstant ist.

Aufgabe 24 – Rotationsflächen konstanter Gauß-Krümmung (GB 02):

Zu der nach Bogenlänge parametrisierten Meridiankurve $(r, h)(t)\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$, $r'^2 + h'^2 = 1$, betrachten wir die erzeugte Rotationsfläche. Wir wollen alle solche Flächen mit konstanter Gausskrümmung $K \equiv c$ untersuchen.

a) Warum braucht man nur die Rotationsflächen mit $K \equiv -1, 0, +1$ zu ermitteln, wenn man alle Rotationsflächen mit konstantem K bestimmen möchte?
b) Leiten Sie aus $K \equiv c$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für r her und lösen Sie diese. Geben Sie danach eine Integraldarstellung der Funktion h an.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$.
c) Geben Sie im Fall $K \equiv 0$ explizit die Funktionen r und h an. Welche Rotationsflächen ergeben sich hier?
d) Wir betrachten nun den Fall $K \equiv 1$. Zeigen Sie, dass $r(t) = a \cos t$ zu $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung aus a) ist. Berechnen Sie $h(t)$ im Falle $a = 1$ explizit und skizzieren Sie die Meridiankurve. Im Falle $0 < a < 1$ und $a > 1$ lässt sich h nicht mehr elementar darstellen, Sie können Sie jedoch qualitative Aussagen (Definitionsbereich, Wertebereich und Monotonie von r und h) angeben und somit ebenfalls für diese Fälle die Meridiankurve skizzieren.

Bemerkung: Ebenso kann man auch für $K \equiv -1$ vorgehen; Mit der Traktix haben wir ein Beispiel für diesen Fall bereits konstruiert.

Aufgabe 25 – Tangentialebene (Bergner 04):

Zeigen Sie für eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die folgenden Aussagen:

a) Gilt für die Gausskrümmung $K(p) > 0$ in einem Punkt $p \in U$, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $f(V)$ auf einer Seite der Tangentialebene T_pf liegt.
b) Gilt andererseits $K(p) < 0$, so existieren in jeder Umgebung $V \subset U$ von p zwei Punkte $p_1, p_2 \in V$, so dass $f(p_1)$ und $f(p_2)$ auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene T_pf liegen.

Aufgabe 26 – Asymptotenrichtungen (GB 05):

Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt *Asymptotenrichtung* in $p \in U$, wenn die Normalkrümmung $g_p(S_pX, X) = 0$ erfüllt. Benutzen Sie die Eulerformel um für zweidimensionale Flächen $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ zu zeigen:

a) Die Gaußkrümmung ist genau dann in einem Punkt p negativ, wenn durch p genau zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen gehen.
b) Die zwei Hauptkrümmungen sind entgegensetzt gleich, d.h. sie sind $\pm\kappa \neq 0$, genau dann, wenn die Asymptotenrichtungen aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 27 – Flächen mit verschwindender mittlerer und Gausskrümmung (Bergner 04):

Auf $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gegeben, für welches zugleich $H \equiv 0$ und $K \equiv 0$ gelte. Zeigen Sie, dass f in einer Ebene enthalten ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Weingartenabbildung und somit die zweite Fundamentalform die Null-Matrix sind.
b) Folgern Sie, dass die Gaussabbildung $\nu(p)$ konstant ist und somit die Fläche in einer Ebene liegt.
c) Gilt obige Aussage auch im Falle von Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ falls $n \geq 3$?

Aufgabe 28 – Scherksche Minimalfläche (Bergner 04):

Laut (22) ist ein Graph $f(x, y) = (x, y, u(x, y))$ eine *Minimalfläche*, d.h. seine mittlere Krümmung ist null, falls die Differentialgleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

gilt. Wir wollen nun eine Minimalfläche der speziellen Form $u(x, y) = g(x) + h(y)$ finden. Diese wird *Scherksche Minimalfläche* genannt.

a) Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\frac{g''(x)}{1 + g'(x)^2} = a = -\frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2} \quad \text{für alle } x, y$$
gilt.
b) Lösen Sie nun diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$. Was ist der maximale Definitionsbereich der Lösung? (*Hinweis:* $\frac{d}{dt} \log \cos t = -\tan t$.)

Aufgabe 29 – Parallelflächen (Bergner 04):

Zu einer Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit Gauß-Abbildung ν erklären wir

$$f^s : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad f^s(x, y) := f(x, y) + s\nu(x, y).$$

als zugehörige Parallelfläche im Abstand s. Wir setzen voraus, dass s klein genug ist, so dass f^s Immersion ist, siehe Aufgabe 8. Dort hatten wir auch gezeigt: ν auch Gaussabbildung von f^s.

a) Sei die Fläche f nun in Krümmungslinienparametern parametrisiert, d.h. $\nu_x = \kappa_1 f_x$ und $\nu_y = \kappa_2 f_y$ mit den beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2. Zeigen Sie
$$f_x^s \times f_y^s = (1 + 2Hs + Ks^2) f_x \times f_y\ ,$$
wobei H die mittlere und K die Gausskrümmung von f seien.
b) Folgern Sie für den Flächeninhalt $A(f^s)$ der Parallelfläche die Entwicklung
$$A(f^s) = A(f) + 2s \int_U H\, dA + s^2 \int_U K\, dA$$
mit $dA := |f_x \times f_y| dxdy$ falls $|s| \leq \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Aufgabe 30 – Zweite Fundamentalform einer impliziten Fläche (GB 05):

Wir führen Aufgabe 7 weiter. Sei also $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Flächenstück, das durch $\varphi \in C^2(V, \mathbb{R})$ implizit beschrieben wird, d.h. es gilt $M := \{f(x) : x \in U\} = \{p \in V : \varphi(p) = 0\}$ und insbesondere $\varphi \circ f = 0$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sogar $|\nabla\varphi(p)| = 1$ für alle $p \in M$ gilt. Man kann dies stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion (welcher?) erreichen. Dann ist $\tilde\nu := \nabla\varphi$ auf V definiert und $\nu := \tilde\nu \circ f$ die Gauß-Abbildung des Flächenstücks.

a) Berechnen Sie mit der Kettenregel als eine Vorübung $\partial_i \nu^l = \partial_i(\tilde\nu^l \circ f)$, d.h. die i-te Ableitung der l-ten Komponente der Normale; verwenden Sie am besten die Summenschreibweise.
b) Berechnen Sie nun die Koeffizienten b_{ij} der zweiten Fundamentalform in Summenschreibweise.
c) Drücken Sie b_{ij} nur durch die Hesseform von φ sowie f und die Standardbasis aus (keine Summenschreibweise). Bestimmen Sie $b(X, Y) = b\big(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big)$, indem Sie ebenfalls ohne Summen schreiben.

Aufgabe 31 – Variante der Weingarten-Abbildung (Reif 08):

Sei $P := G^{-1} df^{\mathrm{t}}$ die Pseudo-Inverse von df und $E := P^{\mathrm{t}} BP$ die *eingebettete Weingarten-Abbildung* der Hyperfläche $f := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Welche Dimensionen haben P und E? Zeigen Sie $E\nu = P\nu = 0$.
b) Verifizieren Sie die Gleichung $Edf = -d\nu$. So, wie S die Relation zwischen den *Zeilen* von df und $d\nu$ beschreibt, beschreibt also E die Relation zwischen den *Spalten* von df und $d\nu$.
c) Zeigen Sie: Aus $Sv = \kappa v$ und $w := df\ v$ folgt $Ew = \kappa w$.
d) Verifizieren Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil b) nochmals den aus der Vorlesung bekannten Satz, dass alle Eigenwerte von S reell sind und dass die Hauptkrümmungsrichtungen im Tangentialraum paarweise orthogonal gewählt werden können.
e) Bestimmen Sie E für die beiden hyperbolischen Paraboloide aus Aufgabe 18.

Teil 3. Die innere Geometrie von Flächenstücken (2002 und 04)

`11. Vorlesung, Montag 28.6.04`

Die *innere Geometrie* von M besteht aus denjenigen Größen, die allein durch Längenmessung innerhalb von M bestimmbar sind, d.h. durch alle aus g abgeleiteten Größen. Für Kurven gehört lediglich die Bogenlänge zur inneren Geometrie, nicht aber die Krümmung. Für Flächen werden wir jedoch das erstaunliche Ergebnis finden, dass die Gauß-Krümmung zur inneren Geometrie gehört.

1. Kritische Punkte der Bogenlänge

In diesem Abschnitt sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: U \to \mathbb{R}^m$ ein parametrisiertes Flächenstück beliebiger Kodimension $m - n \geq 0$.

Wir wollen die kürzeste Kurve zwischen zwei Punkten P und Q des Flächenstücks finden, also

$$(1)\quad L(c) = \int_a^b |c'|\,dt \to \min \qquad \text{für: } c = f \circ \gamma, \quad \gamma: [a,b] \to U, \qquad c(a) = P, \quad c(b) = Q.$$

Zwei Fragen stellen sich:

1. Gibt es eine solche Kurve (inf = min)?
2. Wie findet und berechnet man sie?

Als Antwort auf die zweite Frage werden wir eine notwendige Krümmungsbedingung herleiten, die eine gewöhnliche Differentialgleichung darstellt; damit beantworten wir auch die erste Frage soweit, dass diese Gleichung lokal lösbar ist.

1.1. **Erste Variation der Bogenlänge.** Um die Länge einer gegebenen Kurve mit anderen Kurven zu vergleichen, führen wir ein:

Definition. Es sei $\gamma: [a,b] \to U$. Eine *Variation* von γ ist eine (glatte) Abbildung

$$h: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to U \qquad \text{für } \varepsilon > 0$$

mit $h_0(t) = \gamma(t)$. Die Abbildung $h(s,t) = h_s(t)$ heißt *eigentliche Variation von* γ, wenn $h_s(a) = \gamma(a)$ und $h_s(b) = \gamma(b)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt.

Der Begriff der Variation erfaßt also nur benachbarte Vergleichskurven. Zur Vereinfachung beschränken wir uns nun auf Kurven, deren Geschwindigkeit konstant ist.

Lemma 1 (1. Variation)**.** *Hat $\gamma: [a,b] \to U$ konstante Geschwindigkeit $k := \|\gamma'\| \neq 0$ und ist h_s eine Variation von γ, so gilt*

$$(2)\qquad \frac{d}{ds} L(f \circ h_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{k}\, g\left(\frac{\partial h}{\partial s}(0,t), \gamma'(t)\right)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b \left\langle df_{\gamma(t)} \frac{\partial h}{\partial s}(0,t),\, c''(t)\right\rangle dt.$$

Beispiele. Wir betrachten den Fall der Ebene, also $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $df = \mathrm{id}$, $c = \gamma$, $g = \langle , \rangle$.

1. Es sei $c(t)$ die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$, z.B. $c(t) = (t, 0)$ auf $[0,1]$. Betrachten wir Strecken $h_s(t)$ von $(0,0)$ nach $(1+s, s)$, so verschwindet der Integralterm im Satz (wegen $c'' \equiv 0$). Es verbleibt der Randterm $\frac{d}{ds} L(h_s)|_{s=0} = \left\langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0} \right\rangle = 1$. Die Bogenlänge von c nimmt also unter der Variation zu.

2. Um einen Fall anzusehen, für den (nur) der zweite Term etwas liefert, wenden wir die Formel auf Kreise verschiedener Radien in der Ebene an. Für $c(t) = (\cos t, \sin t)$, z.B. auf $t \in [0,\pi]$ ist $h_s(t) := \big((1-s)\cos t, (1-s)\sin t\big)$ eine uneigentliche Variation. Wegen $\frac{\partial h}{\partial s}(0,t) = -c(t) \perp c'(t)$ verschwinden die beiden Randterme der ersten Variation; wegen $c'' = -c$ ist der Integrand $= 1$. Nach (2) verkürzen sich die Halbkreise in c, und zwar mit Ableitung $-\pi$. Tatsächlich ist $L(h_s) = (1-s)\pi$, was in $s = 0$ die Ableitung $-\pi$ hat.

Beweis. Die Länge von $f \circ h_s$ ist

$$L(f \circ h_s) = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d}{dt}(f \circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f \circ h_s) \right\rangle}\, dt.$$

Durch Differenzieren unter dem Integral erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} L(f \circ h_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\langle .,. \rangle}\big|_{s=0}} 2\left\langle \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}(f \circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f \circ h_s) \right\rangle\Big|_{(s=0)} dt \\
&\overset{\text{Schwarzsches Lemma}}{=} \frac{1}{k}\int_a^b \left\langle \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(f \circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f \circ h_s) \right\rangle\Big|_{(s=0)} dt \\
&= \frac{1}{k}\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\Big\langle \underbrace{\frac{d}{ds}(f \circ h_s)}_{df \cdot \frac{\partial h}{\partial s}},\, \underbrace{\frac{d}{dt}(f \circ h_s)}_{df \cdot \gamma' \text{ für } s=0} \Big\rangle - \left\langle \frac{d}{ds}(f \circ h_s),\, \frac{d^2}{dt^2}(f \circ h_s) \right\rangle\right]_{(s=0)} dt \\
&= \frac{1}{k} g\Big(\frac{\partial h}{\partial s}, \gamma'\Big)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b \left\langle df \cdot \frac{\partial h}{\partial s},\, c'' \right\rangle dt
\end{aligned}$$

□

Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn man $\frac{\partial h}{\partial s}\big|_{s=0}$ einen Namen gibt: Wir nennen $V = \frac{\partial h}{\partial s}(0,t)$ das *Variations-Vektorfeld* von h; es handelt sich dabei also um eine glatte Abbildung $V: [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Umgekehrt stellt zu gegebenem Variations-Vektorfeld V die Abbildung

$$(3)\qquad h_s(t) = \gamma(t) + sV(t)$$

eine Variation mit Variationsfeld V dar. Wegen $[a, b]$ kompakt gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $h_s(t) \in U$ für $|s| < \varepsilon$, $t \in [a, b]$.

Das Lemma sagt nun, dass $\frac{d}{ds} L(f \circ h_s)\big|_{s=0}$ nur vom Variationsvektorfeld $V = \frac{\partial h}{\partial s}|_{s=0}$ abhängt. Wir führen auch für die 1. Variation eine Bezeichnung ein, die dies deutlich macht:

$$\delta_V L(c) := \frac{d}{ds}\big(L(f \circ h_s)\big)|_{s=0}$$

Wir können damit die Formel der 1. Variation umschreiben als

$$\delta_V L(c) = \frac{1}{\|\gamma'\|} g\left(V(t), \gamma'(t)\right)\Big|_a^b - \frac{1}{\|\gamma'\|} \int_a^b \Big\langle df_{\gamma(t)} V(t),\, c''(t) \Big\rangle\, dt. \tag{4}$$

Bemerkung. Es ist nicht ganz so anschaulich, aber mathematisch besser, statt der Länge $\int |c'|\, dt$ die *Energie* $\int |c'|^2\, dt$ zu betrachten. Man kann zeigen (Übung), dass ein beliebiger kritischer Punkt c der Energie die Länge minimiert und zugleich konstante Geschwindigkeit $|c'|$ besitzt. Durch Verwenden der Energie stellt sich also eine gute Parametrisierung der Kurve von alleine ein.

Geodätische sind kritische Punkte der Länge:

Definition. Eine Kurve $c = f \circ \gamma$ heißt *Geodätische*, wenn $|c'|$ konstant ist und $\delta_V L(c)$ für jedes eigentliche Variationsfeld V (also $V(a) = V(b) = 0$) verschwindet.

Insbesondere sind (absolute) Minima der Länge, sogenannte *Kürzeste*, geodätisch:

Satz 2. *Sei $c = f \circ \gamma$ für $\gamma \colon [a, b] \to U$ eine mit konstanter Geschwindigkeit $|c'|$ parametrisierte Kurve. Gibt es keine kürzere Kurve von $c(a)$ nach $c(b)$, so ist c geodätisch.*

Beweis. Für jede eigentliche Variation h_s von c hat $s \mapsto L(h_s)$ in $s = 0$ ein Minimum. Also gilt $\delta_V L(c) = 0$ und c ist geodätisch. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Wie wir gleich sehen werden, sind Großkreise in $\mathbb{S}^n$ geodätisch, aber nur bis Länge $\leq \pi$ sind sie auch Kürzeste; falls die Länge $< \pi$ ist, ist die Kürzeste sogar eindeutig. Eine gute Vorstellung dazu ist: Ein Gummiband auf einem Großkreis von $\mathbb{S}^2$ liegt im stabilen bzw. instabilen Gleichgewicht, wenn seine Länge $< \pi$ bzw. $> \pi$ ist.

1.2. **Geodätische.** Um eine Gleichung für Geodätische herzuleiten, zerlegen wir für c mit konstanter Geschwindigkeit $|c'|$ den Krümmungsvektor c'' orthogonal in

$$c'' = c''^{\top} + c''^{\perp} \quad \in Tf \oplus Nf. \tag{5}$$

Im Spezialfall von Hyperflächen hatten wir in II(13) für den Normalanteil folgenden Ausdruck gefunden: $c''^{\perp} = \langle c'', \nu \circ \gamma \rangle (\nu \circ \gamma) = g(S\gamma', \gamma')(\nu \circ \gamma)$.

Ist c geodätisch, so verschwindet die *geodätische Krümmung* $\kappa_g := \left|c''^{\top}\right|$:

Satz 3 (Johann Bernoulli 1698, Euler 1728)**.** *Eine Kurve $c = f \circ \gamma$ ist c geodätisch genau dann, wenn für alle t die zweite Ableitung von $f \circ \gamma$ senkrecht auf dem Tangentialraum Tf steht, d.h. für alle $t \in [a, b]$ ist*

$$c''(t) \in N_{\gamma(t)} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad c''^{\top} \equiv 0.$$

Beispiel. Seien $P, Q \in \mathbb{S}^n$ mit $P \perp Q$. Dann ist $c(t) := P \cos t + Q \sin t$ ein Großkreis. Wegen $c''(t) = -c(t)$ ist $c''^{\top} \equiv 0$, also sind Großkreise geodätisch.

Zur Geschichte des Satzes siehe [HT], S.107-110. Zum Beweis benötigen wir eine Hilfsaussage. Die Rechnung

$$\frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\big\langle c', c'' \big\rangle = 2\big\langle c', (c'')^{\top} \big\rangle = 0$$

zeigt:

Lemma 4. *Jede Kurve $c = f \circ \gamma$ mit $\big(c''(t)\big)^{\top} = 0$ hat konstante Geschwindigkeit.*

Beweis des Satzes. "$\Leftarrow$": Die Aussage folgt aus (4) und dem Lemma.

"$\Rightarrow$": Der Fall $|c'| \equiv 0$ ist trivial. Anderenfalls zeigen wir nun indirekt, dass für eine Geodätische c die zweite Ableitung im Normalraum liegt. Durch orthogonale Zerlegung definieren wir:

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma) = df \cdot X(t) + N(t) \in T_{\gamma(t)} f \oplus N_{\gamma(t)} f$$

Wir zeigen: Ist $X(t_0) \neq 0$ für $t_0 \in (a, b)$, so gibt es ein Variationsfeld V mit $\delta_V L(c) \neq 0$.

Wir werden nun zeigen, dass die Kurve c kürzer wird, wenn wir sie in Richtung ihrer Krümmung variieren (wir "schneiden Kurven ab"). Leider können wir nicht direkt $V := X$ setzen, denn X muss nicht eigentlich sein. Daher wählen wir eine (glatte) Hutfunktion $\varphi \colon [a, b] \to [0, \infty)$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ und $\varphi(t_0) > 0$. Setzen wir dann $V(t) := \varphi(t) X(t)$ sowie $h_s(t) := \gamma(t) + sV(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \delta_V L(c) &\overset{(4),\, h_s \text{ eigentlich}}{=} -\frac{1}{\|\gamma'\|} \int_a^b \Big\langle df\big(\varphi(t) X(t)\big),\ df \cdot X(t) \Big\rangle\, dt \\ &= -\frac{1}{\|\gamma'\|} \int_a^b g\big(\varphi(t) X(t),\, X(t)\big)\, dt = -\frac{1}{\|\gamma'\|} \int_a^b \varphi(t) \|X(t)\|^2\, dt < 0, \end{aligned}$$

denn φ wie $\|X\|$ sind stetig und daher in einer ganzen Umgebung von t_0 von 0 verschieden. □

Beispiele. 1. In $\mathbb{R}^n$ erfüllen Geodätische $c'' = 0$ und sind daher mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Geraden. Teilstücke beliebiger Länge sind Kürzeste.

2. Rotationsflächen: Siehe Übungen.

Bemerkungen. 1. Physikalisch ist Kraft/Masse = Beschleunigung = Krümmung. Daher hat man folgende Interpretation des Satzes: Für einen Massepunkt, der sich auf einer Fläche bewegt, ist die Normalkrümmung die Zwangskraft, die nötig ist, um den Punkt innerhalb der Fläche zu halten. Wenn wir darüber hinaus keine Kräfte auf den Massepunkt einwirken lassen, so ist seine Bahn geodätisch. In diesem Sinn ist eine Geodätische die Bahn einer unbeschleunigten Bewegung auf einer Fläche.

2. Im Lemma der 1. Variation haben wir durch die beiden Schritte (i) Vertauschen der Ableitungen und (ii) partielle Integration eine Integralbedingung angegeben, aus der wir im letzten Lemma die punktweise Bedingung $c''^{\top} \equiv 0$ hergeleitet haben. Man sagt, wir haben aus dem Variationsintegral (1) eine *Eulergleichung* hergeleitet. Diese Methoden faßt man unter dem Begriff der *Variationsrechnung* zusammen.

3. Wir können Kurven c als Elemente aus einem Banachraum auffassen (z.B. $H^{1,2}([0,1])$). Ein Tangentialvektor an c ist dann ein Vektorfeld längs c. Die erste Variation $\delta_V L$ stellt dann eine Richtungsableitung des Funktionals L auf dem Banachraum der Kurven dar.

`12. Vorlesung, Montag 5.7.04` ______________________________

1.3. **Orthogonale Zerlegung von d^2f und Christoffel-Symbole.** Die etwas technischen Resultate dieses Abschnitts werden wir benutzen, um eine Differentialgleichung für Geodätische aufzustellen. Sie werden weiterhin zum Theorema egregium führen.

Für eine beliebige Kurve $c = f \circ \gamma$ können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
c''(t) &= \frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = \frac{d}{dt}(df\cdot\gamma')(t) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i \gamma'^i(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\gamma(t)\big)\Big) \\
&= \sum_i \gamma''^i(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\gamma(t)\big) + \sum_{i,j}\gamma'^i(t)\gamma'^j(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(\gamma(t)\big),
\end{aligned} \tag{6}
$$

bzw. $c'' = df\cdot\gamma'' + d^2f(\gamma',\gamma')$. Wir suchen einen Ausdruck für $c''^{\top}$. Der erste Summand des Resultats ist ohnehin tangential; um den Tangentialanteil des zweiten behandeln zu können, schreiben wir ihn bezüglich der Basis $\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)$ von Tf:

Definition. Die *Christoffel-Symbole* zu $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k\colon U \to \mathbb{R}$ für $1 \le i,j,k \le n$, definiert durch

$$
\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\Big)^{\top} = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p). \tag{7}
$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Beispiele. 1. Aus unseren Formeln sieht man: Sämtliche Christoffel-Symbole verschwinden genau dann, wenn sämtliche Ableitungen ∂g der Metrik verschwinden. Dies ist zum Beispiel der Fall für lineare Parametrisierungen einer Hyperebene, etwa durch $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $f = (A,0)$ mit $A \in \mathsf{GL}(n)$. Unter Verbiegungen der Bildebene, jedoch nicht unter Verzerrungen, bleibt dieser Tatbestand erhalten.

2. Wählt man eine gekrümmte (nichtlineare) Parametrisierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ wie etwa $(x,y) \mapsto \big(\sinh x, y(y^2+1)\big)$, so verschwinden die Christoffelsymbole nicht.

In Sinne dieser Beispiele sind die Christoffelsymbole Korrekturterme, die man in der Geodätischengleichung dann braucht, wenn man nicht-linear parametrisiert.

Die erste Variation $\delta_V L(c)$ gehört klarerweise zur inneren Geometrie. Wir überzeugen uns nun davon, dass auch die rechte Seite der Variationsformel (4) zur inneren Geometrie gehört, indem wir für die Christoffel-Symbole zeigen:

Lemma 5. *Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k sind allein durch die erste Fundamentalform bestimmt:*

$$
\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n g^{lk}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\Big) \qquad \text{für } 1 \le i,j,l \le n \tag{8}
$$

Beweis. Wir schreiben $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und berechnen die Terme der rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
\partial_i g_{jk} &= \partial_i\langle\partial_j f, \partial_k f\rangle = \langle\partial_{ij}f, \partial_k f\rangle + \langle\partial_j f, \partial_{ik} f\rangle \\
\partial_j g_{ki} &= \quad \langle\partial_{jk}f, \partial_i f\rangle + \langle\partial_k f, \partial_{ji} f\rangle \\
-\partial_k g_{ij} &= -\langle\partial_{ki}f, \partial_j f\rangle - \langle\partial_i f, \partial_{kj} f\rangle
\end{aligned}
$$

Als Summe erhalten wir

$$
\frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big) = \langle\partial_{ij}f, \partial_k f\rangle \overset{\partial_k f \in Tf}{=} \big\langle(\partial_{ij}f)^{\top}, \partial_k f\big\rangle = \big\langle \textstyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \partial_\mu f, \partial_k f\big\rangle = \displaystyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu g_{\mu k}.
$$

Es folgt

$$
\sum_k \frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big)g^{kl} = \sum_{k,\mu}\Gamma_{ij}^\mu g_{\mu k} g^{kl} = \sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \delta_\mu^l = \Gamma_{ij}^l. \qquad \square
$$

Beispiel. Eine Fläche heißt *abwickelbar*, wenn jeder Punkt eine Umgebung hat, die sogar längentreu durch $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrisiert wird. Eine solche Abbildung wird beispielsweise durch das Verbiegen eines Blatts Papier (mit Standardkoordinaten) realisiert. Also sind Zylinder und Kegel (ohne Spitze) abwickelbar. Die Längentreue bedeutet, dass die erste Fundamentalform g gerade die von Standardkoordinaten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) ist, also $g = \delta$. Nach dem Lemma verschwinden die Christoffel-Symbole abwickelbarer Flächen.

1.4. **Differentialgleichung für Geodätische.** Eine Geodätische $c = f \circ \gamma$ ist nach dem Satz von Bernoulli dadurch charakterisiert, dass ihre Beschleunigung keine Tangentialkomponente hat, $c''^\top \equiv 0$. Wir wollen diese Bedingung als gewöhnliche Differentialgleichung deuten.

Im euklidischen Raum mit Standard-Koordinaten werden Geodätische durch die Bedingung $c'' = 0$ charakterisiert. Im allgemeinen Fall muss man einen Korrekturterm hinzufügen:

Satz 6. *Eine Kurve $c = f \circ \gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist ($\|\gamma'\|$ konstant), ist geodätisch genau dann, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt*

$$\gamma''^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t)\gamma'^j(t) = 0 \qquad \text{für } k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Beweis. Nach dem Satz von Bernoulli gilt

$$0 = c''^\top = \sum_k \Big(\gamma''^k + \sum_{i,j} \gamma'^i\gamma'^j(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)\Big)\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

In dieser Linearkombination sind die n Vektoren $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$ linear unabhängig in $T_p f \subset \mathbb{R}^m$. Daraus folgt das Verschwinden der Koeffizienten. □

Wir können jetzt die lokale Existenz von Geodätischen zeigen.

Satz 7. *Es seien $p \in U$, $X \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Geodätische $\gamma = \gamma_{p,X} \colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to U$ mit $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$.*

Beweis. Das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung (9) erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung in γ, denn die Christoffelsymbole sind glatt (genauer?). Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert daher genau eine Lösung $\gamma(t)$ zu Anfangswerten $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$, definiert in einer Umgebung von t_0. Dies bedeutet $(c'')^\top = 0$ für $c = f \circ \gamma$. Nach dem Satz von Bernoulli ist daher c geodätisch. □

Die globale Existenz von Geodätischen ist ein anderes Problem, das wir erst in der Vorlesung Riemannsche Geometrie im Kontext von Mannigfaltigkeiten behandeln werden.

Beispiel. Für $\mathbb{S}^n$ seien gegeben $P \in \mathbb{S}^n$ und $V \in T_P\mathbb{S}^n \setminus \{0\}$. Wegen $P \perp V$ liegt der Großkreis $c_{P,V}(t) := \cos(t|V|)\, P + \sin(t|V|)\, \frac{V}{|V|}$ in $\mathbb{S}^n$, weiter erfüllt er die Anfangsbedingungen $c_{P,V}(0) = P$ und $c'_{P,V}(0) = V$. Natürlich gilt wegen $c''_{P,V}(t) = -|V|^2 c_{P,V}(t)$, dass $c''^\top = 0$ ist, d.h. $c_{P,V}$ ist Geodätische. Nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes gibt es keine weiteren Geodätischen auf $\mathbb{S}^n$; insbesondere ist jede Kürzeste ein Teilstück eines Großkreises.

2. Beziehungen zwischen innerer und äusserer Geometrie

2.1. **Hyperflächengleichungen.** Eine ebene Kurve c mit Normale ν ist in Bogenlängenparametrisierung allein durch κ bestimmt. Tatsächlich hatten wir gesehen, dass c, ν ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erfüllt, dessen Lösung zu gegebenen Anfangsbedingungen eindeutig (sogar explizit) ist. Durch Umparametrisierung können wir natürlich auch eine ebene Kurve finden, für die wir die beiden Größen $|c'|, \kappa$ festlegen.

Ist f ein Hyperflächenstück mit Normale ν, so haben wir den Größen $|c'|, \kappa$ entsprechende Ausdrücke definiert:
• Die erste Fundamentalform g. Die ersten Ableitungen von g definieren Christoffel-Symbole Γ gemäß (8).
• Die zweite Fundamentalform b. Wenn wir g schon kennen, ist dies äquivalent zur Kenntnis der Weingartenabbildung S.

So wie für Kurven wollen wir nun für Hyperflächen ein System von Differentialgleichungen angeben –diesmal partiell–, das zu gegebenen Fundamentalformen g, b von f, ν erfüllt wird:

Satz 8. *Sei $f \colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein parametrisiertes Hyperflächenstück mit Normale ν, und*

$$g_{ij} := \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle, \qquad b_{ij} := \langle \partial_{ij} f, \nu\rangle \qquad \text{für } 1 \le i, j \le n;$$

weiterhin benutzen wir als abkürzende Schreibweise $\Gamma_{ij}^l := \sum_k \frac{1}{2} g^{lk}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big)$. Dann gilt das folgende System von partiellen Differentialgleichungen für f, ν auf U, genannt Hyperflächengleichungen*: Die* (Gaußsche) Ableitungsgleichung

$$\partial_{ij} f = \sum_k \Gamma_{ij}^k\, \partial_k f + b_{ij}\nu \qquad \text{für } 1 \le i, j \le n \tag{10}$$

und die Weingartenformel

$$\partial_j \nu = -\sum_{i,k} g^{ik} b_{kj} \partial_i f \qquad \text{für } 1 \le j \le n. \tag{11}$$

Beweis. Die Gaußsche Ableitungsgleichung stellt eine orthogonale Zerlegung von $d^2 f$ in $Tf \oplus Nf$ dar. In (7) hatten wir die Christoffelsymbole durch die Tangentialkomponente der zweiten Ableitungen definiert, und in II(10) die zweite Fundamentalform mit der Normalkomponente dargestellt.

Die definierende Gleichung für S ist $d\nu = -df \cdot S$, bzw. $d\nu(e_j) = -df \cdot S(e_j) = -\sum_i S_j^i \partial_i f$. Durch Verwendung von II(15) entsteht daraus die Weingartenformel. □

Sind g und b gegeben, so kann man nach der Lösbarkeit der Hyperflächengleichungen fragen, genauer:

• Eindeutigkeit: Ist die Lösung f, ν eindeutig zu gegebenen Anfangsbedingungen, d.h. haben wir mit g, b alle *Invarianten* von parametrisierten Flächenstücken gefunden?
• Existenz: Gibt es stets eine Lösung oder sind g, b noch durch weitere notwendige Bedingungen verknüpft?

Die Antwort auf die erste Frage liefert ein Eindeutigkeitssatz:

Satz 9. *Es seien gegeben ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$, sowie matrixwertige Funktionen $g, b \colon U \to \mathbb{R}^{n^2}$. Gibt es eine Lösung $f \colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu \colon U \to \mathbb{S}^n$ der Hyperflächengleichungen* (10), (11), *so ist diese eindeutig bestimmt durch die Anfangswerte $f(p)$, df_p, $\nu(p)$.*

Natürlich kann es nur dann eine Lösung geben, wenn beispielsweise g, b symmetrisch sind und konsistent mit den Anfangsdaten, also

$$(12) \quad g_p(X,Y) = \langle df_p \cdot X, df_p \cdot Y\rangle, \quad |\nu(p)| = 1, \quad \nu(p) \perp df(X) \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Da keine Bewegung des $\mathbb{R}^{n+1}$ solche Anfangsdaten invariant läßt, kann man die Aussage des Satzes umformulieren: Lösungen der Hyperflächengleichungen sind bis auf Bewegungen des $\mathbb{R}^{n+1}$ eindeutig bestimmt.

Tatsächlich sind die Hyperflächengleichungen unter Bewegungen invariant, denn g, b bleiben unter Bewegungen invariant: Ist $A \in \mathsf{SO}(n+1)$, und $\tilde f := Af$, $\tilde\nu := A\nu$, so folgt

$$\tilde g(X,Y) = \langle Adf \cdot X, Adf \cdot Y\rangle = \langle df \cdot X, df \cdot Y\rangle = g(X,Y)$$
$$\tilde b(X,Y) = -\langle d\tilde\nu \cdot X, d\tilde f \cdot Y\rangle = -\langle Ad\nu \cdot X, Adf \cdot Y\rangle = b(X,Y).$$

`13. Vorlesung, Montag 12.7.04` ________________

Beweis. Es sei $q \in U$ beliebig. Da U ein Gebiet ist, können wir eine glatte Kurve $\gamma \colon [0,1] \to U$ fixieren, die von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(1) = q$ läuft. Weiterhin sei ein parametrisiertes Flächenstück $f \colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu \colon U \to \mathbb{S}^n$ mit Daten g, b, und damit auch Γ, gegeben.

Wir verwenden nun die Hyperflächengleichungen längs γ. Die Einschränkungen

$$N(t) := \nu\big(\gamma(t)\big), \qquad X_i^j(t) := \partial_i f^j\big(\gamma(t)\big)$$

erfüllen

$$(13) \quad \begin{aligned} N'^k &= \sum_j \Big(\partial_j \nu^k \circ \gamma\Big)\gamma'^j \overset{(11)}{=} -\sum_{i,j,l} g^{il} b_{lj}\, \partial_i f^k\, \gamma'^j = -\sum_{i,j,l} g^{il} b_{lj} X_i^k\, \gamma'^j, \\ X'^k_i &= \sum_j \Big(\partial_{ij} f^k \circ \gamma\Big)\gamma'^j \overset{(10)}{=} \sum_j \Big(\textstyle\sum_l \Gamma_{ij}^l X_l^k + b_{ij} N^k\Big)\gamma'^j, \\ (f \circ \gamma)' &= \sum_i X_i \gamma'^i, \end{aligned}$$

wobei auf den rechten Seiten die gegebenen Funktionen g, b, Γ in der Kurve γ auszuwerten sind. Dies stellt ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für N, X, f dar, dessen Koeffizienten $g \circ \gamma$, $b \circ \gamma$, $\Gamma \circ \gamma$, γ glatt sind.

Nach dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf wird jede Lösung $N, X, f \circ \gamma$ des Systems (13) auf dem Intervall $[0,1]$ eindeutig durch ihre Anfangswerte in $t = 0$ bestimmt, d.h. durch $N(0) = \nu(p)$, $X(0) = df_p$, $f\big(\gamma(0)\big) = f(p)$. Insbesondere ist $f(q) = f\big(\gamma(1)\big)$, $\nu(q) = N(1)$ die einzige Lösung der Hyperflächengleichungen im Punkt q. $\square$

2.2. **Integrabilitätsbedingungen und Hauptsatz der Flächentheorie.** Wir beantworten nun die zweite im vorigen Abschnitt gestellte Frage. Tatsächlich erhält man die Existenz von Hyperflächenstücken (f, ν) nur dann, wenn zusätzlich zu (10) (11) noch weitere Gleichungen erfüllt sind.

Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass in jedem Punkt von U gelten muss

$$\partial_{ijk} f = \partial_{jik} f \qquad \text{für alle } 1 \le i, j, k \le n.$$

Diese Bedingungen folgen jedoch nicht aus den Hyperflächengleichungen. Vielmehr stellen sie notwendige Bedingungen dar, die die Fundamentalformen g, b erfüllen müssen, wenn sie die Daten einer Fläche sein sollen.

Satz 10. *Für jede Lösung (f, ν) der Hyperflächengleichungen* (10)(11) *gelten die* Gauß-Gleichung

$$(14) \quad \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^n \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s = \sum_{r=1}^n \big(b_{jk} b_{ir} - b_{ik} b_{jr}\big) g^{rs} \quad \textit{für } 1 \le i, j, k, s \le n,$$

sowie die (Mainardi-)Codazzi-Gleichung

$$(15) \qquad 0 = \partial_i b_{jk} - \partial_j b_{ik} + \sum_{s=1}^n \Gamma_{jk}^s b_{is} - \Gamma_{ik}^s b_{js} \quad \textit{für } 1 \le i, j, k \le n.$$

In der Gauß-Gleichung haben wir die Terme so angeordnet, dass die Gleichung eine interessante Interpretation erlaubt: Die linke Seite hängt nur von g ab, und gehört damit der inneren Geometrie an, während die rechte Seite alle Terme enthält, die von b abhängen. Damit verknüpft die Gauß-Gleichung innere und äußere Geometrie.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_{jk}f &\overset{(10)}{=} \partial_i\Big(\sum_s \Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + b_{jk}\nu\Big)\\
&= \sum_s \Big(\partial_i\Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + \Gamma^s_{jk}\partial_{is}f\Big) + \partial_i b_{jk}\,\nu + b_{kj}\partial_i\nu\\
&\overset{(10)(11)}{=} \sum_s \partial_i\Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + \sum_s \Gamma^s_{jk}\Big(\textstyle\sum_r \Gamma^r_{is}\partial_r f + b_{is}\nu\Big) + \partial_i b_{jk}\,\nu - \displaystyle\sum_{r,s} b_{jk}\big(b_{ir}g^{rs}\partial_s f\big)\\
&= \sum_s \Big(\partial_i\Gamma^s_{jk} + \textstyle\sum_r\big(\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - b_{jk}b_{ir}g^{rs}\big)\Big)\partial_s f + \Big(\textstyle\sum_s \Gamma^s_{jk}b_{is} + \partial_i b_{jk}\Big)\nu
\end{aligned}$$

Um den entsprechenden Ausdruck für $\partial_j\partial_{ik}f$ zu erhalten, müssen wir nur i und j vertauschen. Man erhält dann $0 = \partial_i\partial_{jk}f - \partial_j\partial_{ik}f$, ausgedrückt als eine Linearkombination der Basisvektoren $\partial_1 f, \dots, \partial_n f, \nu$. Also verschwinden die Koeffizienten. Die Koeffizienten von $\partial_s f$ stellen aber die Gauß-Gleichung dar, die Koeffizienten von ν die Codazzi-Gleichung. Wir halten also fest: die Gauß-Gleichung ist die Tangentialkomponente eines Kommutators von dritten Ableitungen von f, während die Codazzi-Gleichung die Normalkomponente darstellt. $\square$

Für die Gauß-Abbildung muss nach dem Satz von Schwarz gelten $\partial_{ij}\nu = \partial_{ji}\nu$. Man kann nachrechnen, dass diese Gleichung keine weiteren Bedingungen ergibt. Auch die Vertauschbarkeit der dritten und höheren Ableitungen von f liefert keine neuen Bedingungen, sondern nur Ableitungen der Gleichungen von Gauß und Codazzi. Daher erwartet man das folgende Existenzresultat:

Satz 11 (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet 1867)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$) einfach zusammenhängend, $p \in U$. Weiter seien symmetrische Matrizenfunktionen $g, b\colon U \to \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben, wobei g zusätzlich positiv definit sei; sie sollen den Gleichungen von Gauß* (14) *und Codazzi* (15) *genügen. Dann existert eine Lösung $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ der Hyperflächengleichungen* (10) (11)*. Sie ist eindeutig zu gegebenen Anfangswerten $f(p)$, df_p, $\nu(p)$, die* (12) *erfüllen.*

Wir lassen den Beweis aus, geben aber die Idee dazu an. Um $f(q)$ zu bestimmen, integriert man, wie im Beweis des Eindeutigkeitssatzes, das Differentialgleichungssystem (13) längs einer Kurve γ von p nach $q \in U$. Man benutzt die Gauß- und Codazzi-Gleichungen (14) (15), um zu zeigen, dass $f(q)$ unabhängig von der gewählten Kurve ist; aus diesem Grund nennt man diese Gleichungen auch *Integrabilitätsbedinungen.* Man kann für alle Schritte bis hierher aber auch einen allgemeinen Satz zitieren (dies tun beispielsweise [dC,K]): Der Satz von Frobenius sagt, dass für die Integrabilität des Systems erster Ordnung für f, X, N die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von $X = \partial f$ und ν hinreichend ist (siehe [S] I, Kapitel 6). Abschließend muss man nachprüfen, dass tatsächlich ν die Gaußabbildung von f und dass g, b die Fundamentalformen von f sind.

2.3. **Theorema egregrium.** Dieser (wörtlich:) herausragende Satz ist die Aussage, dass die Gauß-Krümmung einer zweidimensionalen Fläche, auch wenn sie als Produkt der beiden Hauptkrümmungen definiert ist, gleichwohl zur inneren Geometrie gehört. Anderes gilt für die mittlere Krümmung: Zylinder bzw. Ebene sind innergeometrisch nicht zu unterscheiden, jedoch haben sie $H = \frac{1}{2}$ bzw. $H = 0$.

Das Theorema egregium ist als Aussage erstaunlich: Indizien, warum es gelten sollte, sind schwer zu benennen. Auch unser Beweis erklärt diesen Sachverhalt nicht; er folgt aber unmittelbar aus der für Satz 10 geleisteten Arbeit.

Satz 12 (Theorema egregium, Gauß 1827)**.** *Die Gauß-Krümmung K eines parametrisierten Flächenstücks $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ hängt nur von seiner ersten Fundamentalform und ihren ersten beiden Ableitungen ab.*

Beweis. Wir bezeichnen mit R^s_{ijk} die linke Seite der Gauß-Gleichung (14), und multiplizieren sie mit g_{st}. Wegen $\sum_s g^{rs}g_{st} = \delta^r_t$ erhalten wir

$$\sum_{s=1}^n g_{st}R^s_{ijk} = b_{jk}b_{it} - b_{ik}b_{jt} \quad \text{für } 1 \leq i, j, k, t \leq n.$$

Für $n = 2$ wollen wir die rechte Seite als Determinante schreiben und setzen dazu $i = t = 1$ und $j = k = 2$:

$$g_{11}R^1_{122} + g_{21}R^2_{122} = b_{22}b_{11} - b_{12}^2 = \det b. \tag{16}$$

Also erhalten wir für die Gauß-Krümmung nach Satz II.7

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{g_{11}R^1_{122} + g_{21}R^2_{122}}{\det g}. \tag{17}$$

Nach (14) hängt die rechte Seite nur von g, Γ und ersten Ableitungen von Γ ab. Zusammen mit Lemma 5 folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Die linke Seite von (16) erscheint willkürlich, und ist scheinbar unsymmetrisch in den Indices. Man fasst die linke Seite daher als eine *Spurbildung bezüglich g* auf, indem man definiert $R_{uvxy} := \sum_t g_{ut}R^t_{vxy}$. Damit vereinfacht sich (17) auf $K = R_{1221}/\det g$. Ein anschaulicher (intrinsischer) Krümmungsbegriff in höheren Dimensionen $n \geq 2$ wird durch eine Verallgemeinerung von diesem Ausdruck, die sogenannte *Schnittkrümmung*, gegeben; dies ist Gegenstand der Riemannschen Geometrie.

Die Gaußsche Krümmung ist damit eine *Biegeinvariante*: sie bleibt unter allen Verbiegungen einer Fläche erhalten. Im Gegensatz zu Flächen besitzen Kurven keine Biegeinvarianten, denn die Bogenlängenfunktion bildet sie (lokal) stets längentreu auf $\mathbb{R}$ ab.

Beispiele. 1. Abwickelbare Flächen (Zylinder, Kegel, ...) haben $g \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle$ und daher auch $K \equiv 0$.

2. Die 2-Sphäre hat $K \equiv 1$. Wäre eine Teilmenge das längentreue Bild eines Gebietes der Ebene, so müßte wie im ersten Beispiel $K \equiv 0$ sein. Dies zeigt die klassische Tatsache: Es gibt keine verzerrungstreue Erdkarte. (Dies folgt aber auch bereits daraus, dass in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^2$ Dreiecke mit gleich langen Seiten verschiedene Winkel haben, vergleiche Übungen.)

3. Katenoid und Helikoid haben in geeigneten Parametrisierungen $f, \tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ dieselben ersten Fundamentalformen $g = \tilde{g}$ (siehe Aufgabe II.1). Deshalb stimmen die Gauß-Krümmungen hier in den entsprechenden Punkten überein, $K(p) = \tilde{K}(p)$; eine Rechnung zeigt, dass sie nicht konstant sind.

Wir beschließen die Vorlesung mit einem kurzen Ausblick auf Material, das wir nicht mehr behandeln können. Wenn die Gauß-Krümmung eine innergeometrische Größe ist, so muss es dafür auch entsprechende Deutungen geben. Wir geben zwei an ($n = 2$):

1. Wir betrachten einen Riemannschen Kreis vom Radius $r \geq 0$, d.h. die Menge

$$S_r(p) := \{x \in U \mid \operatorname{dist}(p,x) = r\};$$

dabei soll es für jedes x eine kürzeste Kurve von p nach x geben, deren Länge gerade die Riemannsche Distanz $\operatorname{dist}(p,x)$ definiert. (Für genügend kleines r ist das tatsächlich der Fall.) Es gilt dann die Entwicklung für die Länge

$$L\big(f(S_r(p))\big) = 2\pi r\Big(1 - \frac{K(p)}{6}r^2 + O(r^3)\Big);$$

beachten Sie, dass sich diese Funktion nach $r \in \mathbb{R}$ gerade fortsetzen läßt. Für $\mathbb{S}^2$ gilt beispielsweise $L\big(S_r(p)\big) = 2\pi \sin r = 2\pi\Big(r - \frac{1}{6}r^3 + O(r^5)\Big)$.

2. Nach einem Satz von Gauß gilt für ein von drei Geodätischen berandetes Dreieck $\Delta \subset U$ mit Riemannschen Winkeln α, β, γ

$$\int_\Delta K\,dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Die Gaußkrümmung mißt also den Winkelexzess des Dreiecks gegenüber der flachen Situation. Es gilt auf einer kompakten 2-Mannigfaltigkeit M sogar global (*Satz von Gauß-Bonnet*) $\int_M K\,dS = 2\pi\chi(M)$, wobei $\chi(M)$ die Eulercharakteristik ist. Es gilt $\chi(M) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}$ für eine beliebige Triangulierung oder Polygonalisierung ($\chi(\mathbb{S}^2) = 8 - 12 + 6 = 2$, $\chi(T^2) = 0$, etc.), so dass die Zahl $\chi(M)$ eine topologische Invariante von M ist! Meine Kaffeetasse hat einen Henkel, also ist sie topologisch ein Torus, also weiß ich $\int_{\text{Kaffeetasse}} K\,dS = 0$. Insbesondere ist $\int_M K\,dS$ invariant gegenüber stetiger Verformung: Wird $\mathbb{S}^2$ stetig verformt („eingedellt“), so bleibt für die entstehende Metrik $\int K\,dS = 4\pi$ erhalten.

Der Gauß-Krümmung kommt aber noch aus einem anderen Grund enorme Bedeutung zu: Wie bereits Riemann im 19. Jahrhundert erkannt hat, ist sie der richtige Ausgangspunkt, um einen intrinsisch definierten Krümmungsbegriff auch in höheren Dimensionen einzuführen. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit, auf der man die erste Fundamentalform g gegeben hat (eine sogenannte *Riemannsche Mannigfaltigkeit*), definiert man die Krümmung als Gauß-Krümmung auf zweidimensionalen Unterräumen des Tangentialraumes, bzw. man schneidet aus der höherdimensionalen Mannigfaltigkeit eine geeignete zweidimensionale Mannigfaltigkeit heraus, und nimmt deren Gauß-Krümmung gemäß (17); wegen (14) und (8) bestimmt sie sich allein aus der Vorgabe von g.

`15. Vorlesung, Donnerstag 13.6.02` ———

3. Parallelität und kovariante Ableitung (nur 2002)

Wir wollen eine weitere Deutung der notwendigen Bedingung $c''^\top = 0$ für Geodätische geben. Sie lautet, dass die Tangentialvektoren $c'(t) \in T_{\gamma(t)}f$ längs der Kurve c durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Der Begriff der Parallelverschiebung wird gewöhnlich nicht als besonders intuitiv empfunden, er hat sich aber als entscheidend herausgestellt für das tiefere Verständnis der Krümmung als Größe der inneren Geometrie. Zur Parallelität gehört auch ein quantitativer Begriff, die kovariante Ableitung, der die Richtungsableitung verallgemeinert. Er bildet die Grundlage der axiomatischen Einführung der Differentialgeometrie.

3.1. **Parallelverschiebung längs Kurven.** Ein Vektorfeld $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir als parallel, wenn es konstant ist; dann verschwindet die Ableitung längs jeder Kurve, $\frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(t) = 0$. Wie können wir aber auf einer Fläche ein Vektorfeld parallel verschieben? Betrachten wir das Beispiel $\mathbb{S}^2$: Es sei $X(0)$ ein tangentialer Vektor am Nordpol, d.h. $X(0)$ ist horizontal. Jetzt schieben wir $X(0)$ vom Nordpol weg. Damit $X = X(t)$ tangential bleibt, müssen wir es in den Tangentialraum zurückstellen, indem wir (infinitesimal betrachtet) nur die Vertikalkomponente ändern. Exakt gesprochen heisst das, die Ableitung $X'(0)$ muss im Normalraum liegen. Natürlich könnten wir zusätzlich auch noch $X'(0)$ eine Horizontalkomponente geben; aber das ist nicht nötig, um X tangential zu halten. Wenn wir nur die nötige Bewegung ausführen, also keine tangentiale Rotation haben, dann wollen wir ein tangentiales Vektorfeld für parallel erklären:

Definition. Ein Vektorfeld X bzw. $df(X)$ längs einer Kurve $c = f \circ \gamma$ in einem Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ heißt *parallel längs* γ, wenn

$$(df_{\gamma(t)} \cdot X)'(t) \in N_{\gamma(t)}f.$$

Wir nennen $X(t)$ auch eine *Parallelverschiebung* von $X(t_0)$.

Die Eindeutigkeit zeigen wir erst weiter unten in Satz 14.

Beispiele. 1. Für $\mathbb{R}^n$ stimmt dieser Parallelitätsbegriff mit dem bekannten überein: Beispielsweise für die x, y-Ebene des $\mathbb{R}^3$ sind genau die horizontalen Vektorfelder (mit $X^3 \equiv 0$) tangential. Die Bedingung $X' \| e_3$ bedeutet daher, dass $X'^1, X'^2 \equiv 0$. Also ist X tatsächlich konstant.

2. $f \circ \gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2$ parametrisiere einen Großkreis nach Bogenlänge. Es sei $X(0) \in T_{\gamma(0)}$ gegeben. Ist $X(0) \perp \gamma'(0)$, so ist $df \cdot X(t) := df \cdot X(0) \in T_{\gamma(t)}$ Parallelverschiebung. Für $X(0) := \gamma'(0)$ ist offenbar auch $X(t) := \gamma'(t)$ parallel. Entlang jedes anderen Breitenkreises sind aber weder Tangente noch Kurvennormale parallel; was ist nämlich der Ableitungsvektor?

3. c geodätisch $\iff$ c' parallel.

Bemerkung. Man kann diesen Parallelitätsbegriff auch physikalisch motivieren. Wir betrachten ein *(Foucaultsches) Pendel* auf der Erdoberfläche $\mathbb{S}^2$, wobei wir von der Erdrotation absehen; wir können auch jede andere Fläche betrachten, auf der die Gravitation nur in Normalenrichtung wirkt. Längs einer gegebenen Kurve $c(t)$ wollen wir nun das Pendel verschieben. Die Pendelebene wird aufgespannt durch den Normalenvektor an die Erdoberfläche und einen Tangentialvektor. Letzterer definiert ein stetiges Einheitsvektorfeld $X(t)$ längs $c(t)$. Weil die Gravitation nur in Normalenrichtung auf das Pendel einwirkt, es in Tangentialrichtung aber kräftefrei beläßt, wird $X(t)$ parallel verschoben längs c.

Lemma 13. *Sind X, Y parallel längs c, so ist $g(X, Y)$ konstant. Insbesondere bleibt konstant: die Länge $\|X\|$ und der für $X, Y \neq 0$ definierte Winkel $\alpha := \angle(X, Y)$ mit $\cos\alpha = \frac{g(X,Y)}{\|X\|\|Y\|}$.*

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g(X, Y) &= \Big\langle \frac{d}{dt} df \cdot X,\, df \cdot Y \Big\rangle + \Big\langle df \cdot X,\, \frac{d}{dt} df \cdot Y \Big\rangle \\ &= \Big\langle \underbrace{(\frac{d}{dt} df \cdot X)^\top}_{=0},\, df \cdot Y \Big\rangle + \Big\langle df \cdot X,\, \underbrace{(\frac{d}{dt} df \cdot Y)^\top}_{=0} \Big\rangle = 0\end{aligned}$$

□

Eine Folgerung ist, dass der Parallelitätsbegriff kurvenabhängig ist, d.h. das Ergebnis einer Parallelverschiebung hängt vom Weg ab. Als Beispiel betrachten wir zwei verschiedene Großkreise vom Nord- zum Südpol von $\mathbb{S}^2$. Der Tangentialvektor des einen Kreises ist parallel. Aber vom anderen Kreis aus gesehen liegt dieser Vektor im Nordpol auf einer anderen Seite (vielleicht: links) des Kreises als im Südpol (vielleicht: rechts). Nach dem letzten Lemma macht aber die Parallelverschiebung des Vektors mit dem Tangentialvektor des zweiten Kreises einen konstanten Winkel. Also erhält man durch Parallelverschiebung längs des zweiten Kreises einen anderen Vektor im Südpol. (Ein anderes Beispiel ist durch ein Dreieck mit drei rechten Winkeln in $\mathbb{S}^2$ gegeben, seine Kantenlängen sind $\frac{\pi}{2}$.

3.2. **Kovariante Ableitung längs Kurven.** Es sei $X(t) = X^i(t)e_i$ ein Vektorfeld längs einer Kurve γ. Um die Parallelitätsbedingung rechnerisch handhaben zu können, wiederholen wir die Rechnung (6):

$$\frac{d}{dt}(df \cdot X) = \frac{d}{dt}\Big(X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \underbrace{X'^{\,i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))}_{\in T_{c(t)}f} + \gamma'^i(t) X^j(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t)) \tag{18}$$

Ist X parallel, so verschwindet die Tangentialkomponente. Wir geben dieser Tangentialkomponente einen Namen und schreiben sie mit Hilfe der Christoffel-Symbole:

Definition. Sei $X = X^k e_k \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld längs c. Dann ist die *kovariante Ableitung von X längs c* das eindeutig bestimmte Vektorfeld $\frac{D}{dt}X \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ längs c mit

$$df_{\gamma(t)} \cdot \frac{D}{dt} X(t) = \Big(\frac{d}{dt} df_{\gamma(t)} X(t)\Big)^\top = \Big(X'^{\,k}(t) + \Gamma^k_{ij}\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t) X^j(t)\Big) \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\gamma(t)\big).$$

Es gilt demnach

$$\frac{D}{dt} X = \big(X'^{\,k} + \Gamma^k_{ij} \gamma'^i X^j\big)\, e_k \tag{19}$$

Für ein Vektorfeld $X(t) = X^k(t) e_k$ längs $c(t)$ folgt:

$$\begin{aligned} X \text{ parallel} \quad &\iff \quad \frac{D}{dt} X = 0 \\ &\iff \quad X'^k(t) + \Gamma^k_{ij}\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t) X^j(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{20}$$

Beispiele. 1. In einer Hyperfläche $f \colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist die Tangentialprojektion gegeben durch $Y^\top = Y - \langle Y, \nu\rangle\nu$, d.h. es gilt $df \frac{D}{dt} X = \frac{d}{dt} df \cdot X - \langle \frac{d}{dt} df \cdot X, \nu \rangle \nu$.

$\|X\| = |df \cdot X|$ konstant, so ist

$$\frac{d}{dt}\|X\|^2 = 2\Big\langle \frac{d}{dt} df \cdot X, df \cdot X \Big\rangle = 2\Big\langle \Big(\frac{d}{dt} df \cdot X\Big)^\top, df \cdot X \Big\rangle = 2g\Big(\frac{D}{dt} X, X\Big)$$

Also steht $\frac{D}{dt}X$ in diesem Fall g-senkrecht auf X. Hat speziell γ konstante Geschwindigkeit so steht $\frac{D}{dt}\gamma'$ senkrecht auf γ'.

Die kovariante Ableitung mißt die Änderung von X längs c, und zwar gegenüber parallelen Feldern. Genauer gilt folgendes. Es sei $\big(v_1(0), \dots, v_n(0)\big)$ eine g_p-Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$; sie existiert nach Satz 14 weiter unten. Längs einer Kurve $\gamma \colon [0, b] \to U$ mit $\gamma(0) = p$

sei $\big(v_1(t),\dots,v_n(t)\big)$ die parallele Fortsetzung der Basis. Nach Lemma 13 bleibt dies eine g-Orthonormalbasis für alle t. Dann ist

$$df\cdot\frac{D}{dt}X=\Big(\frac{d}{dt}df(X^k v_k)\Big)^\top = X'^{\,k}\Big(\underbrace{df\cdot v_k}_{\text{tangential}}\Big)^\top + X^k\underbrace{\Big(\frac{d}{dt}df\cdot v_k\Big)^\top}_{=0 \text{ da } v_k \text{ parallel}} = df\big(X'^{\,k}v_k\big),$$

d.h. $\frac{D}{dt}X = X'^{\,k}v_k$. Insbesondere ist eine feste Linearkombination paralleler Felder wieder parallel.

Parallele Vektorfelder erhalten wir als Lösung eines Differentialgleichungssystems. Anders als für Geodätische (Satz 7) ist in diesem Fall aber Gleichung (20) linear in X. Daher erhalten wir nicht nur eine lokale, sondern eine längs der ganzen Kurve definierte Lösung.

Satz 14. *Für ein Flächenstück $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ seien $\gamma\colon[a,b]\to U$, $X_0\in\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes paralleles Vektorfeld $X(t)$ längs $c=f\circ\gamma$ mit $X(a)=X_0$. Wir nennen $X(t)$ die* Parallelverschiebung von X längs c.

Mit der kovariaten Ableitung können wir schreiben:
1. $c=f\circ\gamma$ geodätisch $\iff \frac{D}{dt}\gamma'=0$.
2. Hat $c=f\circ\gamma$ konstante Geschwindigkeit $\|\gamma'\|\neq 0$, so lautet die erste Variation

$$\delta_V L(c)=\frac{1}{\|\gamma'\|}g\big(V,\gamma'\big)\Big|_a^b-\frac{1}{\|\gamma'\|}\int_a^b g\Big(V,\frac{D}{dt}\gamma'\Big)\,dt.$$

Damit haben wir die erste Variation als intrinsische Formel geschrieben. Für eine allgemeine Kurve $c=f\circ\gamma$ kann man $\frac{D}{dt}\gamma'$ verstehen als tangentiale Beschleunigung (d.h. als Krümmungsvektor) der Kurve.

Beispiel. Einen Kegel kann man durch "Aufrollen" eines ebenen Sektors mit Winkel $\alpha>0$ erhalten. Bezeichnen wir mit $U\subset\mathbb{R}^2$ den Sektor, so ist hierdurch eine Parametrisierung $f\colon U\to\mathbb{R}^3$ des Kegels gegeben. Auf dem Segment U haben wir die Standard-Fundamentalform $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weil das Aufrollen die Längen nicht ändert, ist auch in der Parametrisierung f die erste Fundamentalform $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ und die Christoffel-Symbole verschwinden. Die Bilder konstanter Vektoren X ergeben unter f parallele Vektorfelder auf dem Kegel. Ein Breitenkreis des Kegels wird durch ein Kreissegment um die Ecke von U parametrisiert. Relativ zum Tangentialvektor dieses Kreises dreht X mit konstanter Geschwindigkeit. Dies geschieht so, dass ein paralleles Feld X bei einem ganzen Umlauf um den Breitenkreis gerade um den Winkel α gedreht zurückkommt.

`16. Vorlesung, Mittwoch 19.6.02`

Wir wollen das Beispiel auch benutzen, um die Parallelverschiebung längs eines Breitenkreises b von $\mathbb{S}^2$ zu behandeln. Dazu wählen wir einen an den Breitenkreis tangentialen Kegel K und benutzen:

Satz 15. *Liegt eine Kurve c in zwei Flächenstücken f_1, f_2 und stimmt deren Tangentialebene für jeden Punkt aus c überein, so stimmt auch die Parallelverschiebung längs c überein.*

Beweis. Ist $Y(t):=df_1\cdot X_1(t)=df_2\cdot X_2(t)$, so sind wegen $Nf_1=Nf_2$ die beiden Parallelitätsbedingungen $Y'\in Nf_1$ und $Y'\in Nf_2$ äquivalent. □

Beispiel. Ein Breitenkreis von $\mathbb{S}^2$, der die Höhe $0<h<1$ über dem Äquator hat, führt zu einem tangentialen Kegel, der auf ein Winkelsegment der Ebene vom Winkel $2\pi h$ abwickelt (Elementargeometrie). Auf dem Segment, und genauso auf dem Kegel, rotiert ein paralleles Feld um $2\pi h$ (in Richtung "von der Kegelspitze weg"). Dies ist nach dem Satz auch der Drehwinkel längs des Breitenkreises.

Wir halten noch folgendes für spätere Verwendung fest.

Lemma 16. *(i) $X(t)$ ist parallel längs $\gamma(t)$, genau dann wenn $\tilde X(s):=X\big(\psi(s)\big)$ auch parallel längs $\tilde\gamma:=\gamma\big(\psi(s)\big)$ für jede Parametertransformation ψ der Kurve.*
(ii) Für eine reguläre Kurve γ in U ist das Einheitstangentialfeld $\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ genau dann parallel, wenn die Umparametrisierung von γ nach Bogenlänge geodätisch ist.

Beweis. (i) Dies folgt aus der Kettenregel. Wenn wir (18) für $\tilde X$ berechnen, so können wir wegen $\frac{d}{ds}\tilde X(s)=X'\big(\psi(s)\big)\psi'(s)$ und $\frac{d}{ds}\tilde\gamma(s)=\gamma'\big(\psi(s)\big)\psi'(s)$ auf der rechten Seite den Ausdruck $\psi'(s)$ ausklammern. Ist $\psi'(s)\neq 0$, folgt daraus die beahuptete Äquivalenz.
(ii) $\tilde\gamma$ ist geodätisch, genau dann wenn $\tilde X(s):=\tilde\gamma'(s)$ parallel ist. Nach Teil (i) ist dieser Tatbestand unabhängig von der Parametrisierung. □

`18. Vorlesung, Mittwoch 26.6.02`

4. Deutungen der Gauss-Krümmung als innergeometrische Grösse (nur 2002)

Auch wenn das Theorema egregium die Gauß-Krümmung zu einer Größe der inneren Geometrie macht, läßt sich doch den Formeln (17) bzw. (14) schwer eine geometrische Deutung geben. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir uns auf den zweidimensionalen Fall beschränken, um ohne allzuviel weiteren Formalismus ganz konkrete Deutungen der Gauß-Krümmung zu geben. Um diese Deutungen geben zu können, wollen wir zunächst statt einer gegebenen Parametrisierung f eine Umparametrisierung $\tilde f$ konstruieren, die allein in Größen der inneren Geometrie definiert ist.

4.1. **Die Exponentialabbildung.** In Erweiterung der bisher verwendeten Definition wollen wir von nun an auch die konstanten Kurven als Geodätische bezeichnen.

Wir haben mit Satz 7 schon gezeigt, dass für jedes $p \in U$ und $X \in \mathbb{R}^n$ eine Geodätische $\gamma_{p,X}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ existiert, die Anfangspunkt $\gamma_{p,X}(0) = p$ und Anfangsrichtung $\gamma'_{p,X}(0) = X$ hat. Aus der Eindeutigkeitsaussage folgt, dass

$$\gamma_{p,X}(at) = \gamma_{p,aX}(t) \tag{21}$$

gilt für jedes $a > 0$. In der Tat haben beide Kurven denselben Anfangspunkt, und wegen $\frac{d}{dt}\gamma_{p,X}(at)|_{t=0} = a\gamma'_{p,X}(at)|_{t=0} = aX$ bzw. $\frac{d}{dt}\gamma_{p,aX}(t)|_{t=0} = \gamma'_{p,aX}(0) = aX$ auch dieselbe Anfangsrichtung. Insbesondere ist $\gamma_{p,X}(1)$ definiert für $\|X\|$ hinreichend klein:

Definition. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ und $p \in U$ gegeben. Die bezüglich f gegebene Abbildung

$$X \mapsto \exp_p(X) := \gamma_{p,X}(1) \in U$$

nennt man *Exponentialabbildung.*

Die Exponentialabbildung bildet also einen Strahl $\{tX \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le t \le t_0\}$ auf die Geodätische $\gamma_{p,tX}(1) = \gamma_{p,X}(t)$ ab.

Im Falle von Matrizengruppen stimmt die definierte Exponentialabbildung mit der Exponentialreihe überein (siehe Aufgabe 16); dies erklärt den Namen.

Beispiel. Wir können $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ folgendermaßen abbilden: Ist N der Nordpol, so bildet $\operatorname{Exp}(X) := (\cos|X|)N + (\sin|X|)\frac{X}{|X|}$ Strahlen auf Geodätische durch den Nordpol ab. Die Exponentialabbildung bezüglich einer Parametrisierung f von $\mathbb{S}^n$ ergibt sich daraus durch $\operatorname{Exp} = f \circ \exp$.

Satz 17. *Für jedes $p \in U$ gilt $\exp_p(0) = p$, und die Exponentialabbildung ist auf einer offenen Umgebung $B_r^g := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\|_p < r\}$ von 0 definiert. Sie ist differenzierbar und erfüllt $d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}$.*

Beweis. Wir rechnen zuerst die letzte Behauptung nach. Weil die Kurve $t \mapsto X + tY$ für $t = 0$ durch X mit Ableitung Y läuft, kann man folgendermaßen rechnen:

$$d(\exp_p)_0(Y) = \frac{d}{dt}\exp_p(0 + tY)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_{p,tY}(1)\Big|_{t=0} \overset{(21)}{=} \frac{d}{dt}\gamma_{p,Y}(t)\Big|_{t=0} = Y$$

Die anderen Aussagen ergeben sich aus allgemeinen Sätzen über die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Menge $\mathcal{M}$ der (p, X, t), so dass

$$0 = \gamma''^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t)\gamma'^j(t) \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n,$$
$$\gamma'(0) = X, \quad \gamma(0) = p$$

auf $[0, t]$ lösbar ist, ist (relativ) offen in $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$. Wegen $(p, 0, 0) \in \mathcal{M}$ gilt zunächst $\big(p, B_\rho^g, [0, 2\varepsilon)\big) \subset \mathcal{M}$ für $\rho, \varepsilon > 0$. Aus (21) folgt $\big(p, B_{\rho/\varepsilon}^g, [0, 2)\big) \subset \mathcal{M}$, so dass wir den behaupteten Definitionsbereich für $r := \frac{\rho}{\varepsilon}$ erhalten.

Weiterhin hängt die Lösung $\exp_p(X) = \gamma_{p,X}(1)$ differenzierbar vom Anfangswert $\gamma'(0) = X$ ab; die Abhängigkeit ist sogar glatt, da die Koeffizienten glatt sind. $\square$

Weil $d(\exp_p)_0$ den vollen Rang hat, ergibt der Umkehrsatz die Umkehrbarkeit von $\exp_p$ auf einem möglicherweise verkleinerten Ball:

Korollar 18. *Es gibt ein $\rho > 0$, so dass $\exp_p\colon B_\rho^g \to U$ Diffeomorphismus auf sein Bild ist.*

`19. Vorlesung, Donnerstag 26.6.02`

4.2. **Geodätische Polarkoordinaten auf zweidimensionalen Flächen.** Wir wollen uns von nun an auf den Fall $n = 2$ beschränken. Die Ergebnisse dieses Abschnitts bleiben in höherer Dimension aber noch gültig.

Polarkoordinaten der Ebene sind durch die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gegeben, die für $r \neq 0$ eine Immersion darstellt. Wir suchen entsprechende Koordinaten auf einer Fläche $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ in der Umgebung eines Punktes $p \in U$. Dabei ersetzen wir die Ursprungsgeraden $r \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ durch Geodätische durch p. Dazu sei v_1, v_2 eine g_p-Orthonormalbasis, und

$$h_\varphi(t) := \exp_p t(\cos\varphi\, v_1 + \sin\varphi\, v_2) = \exp_p tv(\varphi), \tag{22}$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Damit ist $h_\varphi(t)$ die eindeutig bestimmte Geodätische mit

$$\text{Anfangspunkt} \quad h_\varphi(0) = p, \qquad \text{Anfangsrichtung} \quad \frac{\partial}{\partial t}h_\varphi(0) = \cos\varphi\, v_1 + \sin\varphi\, v_2 =: v(\varphi).$$

Nach Korollar 18 ist h_φ auf $(-\rho, \rho)$ definiert. Weiter ist die Geschwindigkeit konstant (Lemma 4):

$$\big\|h'_\varphi(t)\big\|^2 = \big\|h'_\varphi(0)\big\|^2 = \|v(\varphi)\| = 1 \tag{23}$$

Definition. Ist $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^m$ und $p \in U$, so nennen wir

$$\tilde f\colon (0, \rho) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \qquad \tilde f(t, \varphi) := f\big(h_\varphi(t)\big) = f\big(\exp_p tv(\varphi)\big)$$

eine Reparametrisierung von f durch *geodätische Polarkoordinaten.*

Die erste Fundamentalform ebener Polarkoordinaten ist durch $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = r^2$ gegeben. Beim Übergang zu geodätischen Polarkoordinaten ergibt sich lediglich bei g_{22} eine Störung von höherer Ordnung:

Lemma 19. *Es sei $\rho > 0$ wie in Korollar 18. Dann ist $\tilde{f}\colon (0,\rho)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ eine Immersion, deren erste Fundamentalform* Gaußsche Form *besitzt:*

$$\tilde{g}_{11} \equiv 1, \quad \tilde{g}_{12} \equiv 0, \text{ und } \tilde{g}_{22}(t,\varphi) = G^2(t,\varphi) \text{ für } G\colon (0,\rho)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+.$$

Weiterhin sind folgende Ergänzungen stetig: $G(0,\varphi) := 0$ und $\partial_1 G(0,\varphi) = 1$.

Beachten Sie, dass für $t = 0$ die Abbildung $\tilde{f}$ zwar noch definiert ist, sie dort aber keine Immersion mehr darstellt. Weil wir jedoch später eine Taylor-Entwicklung der Gauß-Krümmung bezüglich des Punktes p (mit Polarkoordinaten $(0,\varphi)$) betrachten wollen, sind wir an den angegebenen Grenzwerten von G und $\partial_1 G$ für $t \to 0$ interessiert.

Beispiel. Geodätische Polarkoordinaten von $\mathbb{S}^2$ erhalten wir durch $\tilde{f}(t,\varphi) = \cos t\, N + \sin t\,\big(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2\big)$. Es gilt

$$\tilde{g}_{22}(t,\varphi) = \left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}(t,\varphi)\right|^2 = \sin^2 t\,\big|-(\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2\big|^2 = \sin^2 t,$$

also $G(t,\varphi) = \sin t$. Das Lemma stimmt für $\mathbb{S}^2$ also nur, solange $\rho \le \pi$.

Beweis. Für $0 < t < r$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $(t,\varphi) \mapsto tv(\varphi)$ eine Immersion für mit Bild in B_r^g. Nach Korollar 18 ist $\exp_p$ Immersion auf diesem Ball. Daher ist auch $\tilde{f}$ dort Immersion.

Wir rechnen aus:

$$\tilde{g}_{11}(t,\varphi) = \left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}(t,\varphi)\right|^2 = \left|\frac{d}{dt}f\big(h_\varphi(t)\big)\right|^2 = \left|df\Big(\frac{\partial}{\partial t}h_\varphi(t)\Big)\right|^2 = \big\|h'_\varphi(t)\big\|^2 \overset{(23)}{=} 1$$

Zu $0 < r < \rho$ betrachten wir nun das feste Zeitintervall $t \in [0,r]$. Für jede Geodätische $t \mapsto \gamma(t) := h_\varphi(t)$ können wir $h_\varphi(t)$ mit $t \in [0,r]$ als Variation von γ ansehen. Dabei variieren wir durch Geodätische, die alle die Länge

$$L(f \circ h_\varphi) = r \tag{24}$$

besitzen, denn jede Kurve $t \mapsto h_\varphi(t)$ ist Geodätische mit Einheits-Geschwindigkeit; die Bogenlänge ist also gleich dem Parameterwert. Es folgt $\frac{\partial}{\partial\varphi}L(f\circ h_\varphi) = 0$. Weiterhin hat h_φ das Variationsfeld $V(t) := \frac{\partial}{\partial\varphi}h_\varphi(t)$. Es verschwindet für $t = 0$, denn $h_\varphi(0) = p$ ist unabhängig von φ, aber es verschwindet im allgemeinen nicht für $t = r$. Weil γ geodätisch ist, reduziert sich die erste Variationsformel auf:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(24)}{=} \delta_V L(f\circ\gamma) = g\big(V,\gamma'\big)\Big|_0^r \overset{V(0)=0}{=} g\big(V(r),\gamma'(r)\big) \\ &= \left\langle df\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}h_\varphi(r)\Big),\, df\Big(\frac{\partial}{\partial t}h_\varphi(r)\Big)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}(r,\varphi),\, \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}(r,\varphi)\right\rangle = \tilde{g}_{12}(r,\varphi). \end{aligned}$$

Wir erhalten also $\tilde{g}_{12}(r,\varphi) = 0$ für jedes $r \in (0,\rho)$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Für $0 < t < \rho$ setzen wir

$$G(t,\varphi) := \sqrt{\tilde{g}_{22}(t,\varphi)} = \left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}(t,\varphi)\right| = \left|df\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}h_\varphi(t)\Big)\right|.$$

Der Ausdruck rechts ist stetig in t. Wegen $h_\varphi(0) = p$ hat er den Grenzwert $G(0,\varphi) = 0$. Weiter ist $G(t,\varphi) \ne 0$ für $0 < t < r$, wegen $\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = 0$ und $\tilde{f}$ Immersion.

Wir benutzen nun die abkürzende Schreibweise $\frac{\partial}{\partial\varphi}v(\varphi) = -\sin\varphi\, v_1 + \cos\varphi\, v_2 =: Jv(\varphi)$. Aus $G(0,\varphi) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}G(t,\varphi) &\overset{\text{Diff.quot.}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{G(t,\varphi)}{t} = \lim_{t\to 0}\left|df_{h_\varphi(t)}\Big(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\varphi}h_\varphi(t)\Big)\right| \\ &\overset{(22)}{=} \left|df_p\Big(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\varphi}\exp_p tv(\varphi)\Big)\right| = \left|df_p\Big(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}d(\exp_p)_{tv(\varphi)}tJv(\varphi)\Big)\right| \\ &= \left|df_p\big(\lim_{t\to 0}d(\exp_p)_{tv(\varphi)}Jv(\varphi)\big)\right| = \left|df_p\cdot d(\exp_p)_0\cdot Jv(\varphi)\right| \\ &\overset{\text{Satz 17}}{=} \left|df_p\cdot Jv(\varphi)\right| = \|Jv(\varphi)\| = 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass v_1, v_2 eine Orthonormalbasis ist, so dass $\|v\|^2 = \|Jv\|^2 = 1$ gilt. Dies bedeutet $\partial_1 G(t,\varphi) \to 1$ für $t \to 0$. Wegen $G(t,\varphi) \to 0$ folgt daraus $G(t,\varphi) > 0$ für kleine $t > 0$. Wenn nötig, verkleinern wir ρ so, dass dies gilt; dann ist g positiv definit und $\tilde{f}$ Immersion. □

Der angegebene Beweis ist etwas mühsam. Der Grund liegt darin, dass wir nicht viel in den Händen haben, was wir benutzen können: Geodätische Polarkoordinaten sind durch exp definiert, sie stellen also die abstrakte Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung dar. Als einziges handfestes Resultat dafür wissen wir nur, dass $d\exp$ in 0 die Identität ist. Dies mussten wir verwenden.

Am Wege liegt nun noch ein wichtiges Resultat. Wir hatten schon gezeigt, dass kürzeste Kurven Geodätische sind. Wir wissen auch, dass die Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist: Auf den Sphären sind Geodätische, die länger als π sind, *nicht* mehr Kürzeste. Wir können die Umkehrung jedoch zeigen, wenn wir uns auf hinreichend kurze Geodätische beschränken.

Genauer wollen wir zeigen, dass für alle Punkte, die im Bild der Polarkoordinaten liegen, die Geodätischen $t \mapsto h_\varphi(t)$ tatsächlich die kürzesten Kurven von p nach $h_\varphi(\rho)$ darstellen. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen für die *geodätische Kreisscheibe* bzw. für den *geodätischen Kreis* um p ein:

$$\begin{aligned} B_r(p) &:= \{q \in U \mid q = h_\varphi(t) \text{ für } t < r,\ \varphi \in \mathbb{R}\}, \\ S_r(p) &:= \{q \in U \mid q = h_\varphi(r) \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Dass $\tilde{g}_{12} = 0$ ist, können wir folgendermaßen deuten: Für $r < \rho$ stehen die geodätischen Kreise senkrecht auf den radialen Geodätischen; diese Tatsache wird auch als *Gauß-Lemma* bezeichnet.

Satz 20. *Es sei $0 < r < \rho$. Auf dem Flächenstück $f: U \to \mathbb{R}^m$ ist keine Kurve $\gamma: [a,b] \to U$ von p nach $q := h_\varphi(r) \neq p$ kürzer als die Geodätische $\{h_\varphi(t) \mid t \in [0,r]\}$. Tatsächlich ist die Kurve γ sogar länger, sofern sie keine Umparametrisierung der Geodätischen darstellt.*

`20. Vorlesung, Mittwoch 3.7.02`

Beweis. (i) Wir behandeln zuerst den Fall, dass γ ganz in $B_\rho(p)$ liegt; wir nehmen zusätzlich an, dass $\gamma(s) \neq p$ für $s > a$ gilt. Wie im Liftungslemma I-8 können wir dann $\gamma(s) = h_{\varphi(s)}\big(t(s)\big)$ schreiben, wobei t, φ glatte Funktionen auf $(a,b]$ mit $\lim_{\varepsilon\searrow 0} t(a+\varepsilon) = 0$ und $t(b) = r$ sind. Interpretieren Sie die folgende Rechnung als eine Zerlegung des Tangentialvektors von $c(s) = \big(f \circ \gamma\big)(s) = \tilde{f}\big(t(s), \varphi(s)\big)$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
L(f \circ \gamma|_{[a+\varepsilon,b]}) &= L\big(f \circ h_\varphi(t)|_{s\in[a+\varepsilon,b]}\big) = L\big(\tilde{f}(t,\varphi)|_{s\in[a+\varepsilon,b]}\big) \\
&= \int_{a+\varepsilon}^b \sqrt{\tilde{g}_{t,\varphi}\Big(\big(\begin{smallmatrix} t' \\ \varphi' \end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix} t' \\ \varphi' \end{smallmatrix}\big)\Big)}\, ds = \int_{a+\varepsilon}^b \sqrt{\tilde{g}_{11}(t,\varphi)t't' + 2\tilde{g}_{12}(t,\varphi)t'\varphi' + \tilde{g}_{22}(t,\varphi)\varphi'\varphi'}\, ds \\
&= \int_{a+\varepsilon}^b \sqrt{t't' + G^2(t,\varphi)\varphi'\varphi'}\, ds \geq \int_{a+\varepsilon}^b |t'|\, ds \geq \int_{a+\varepsilon}^b t'\, ds = t(b) - t(a+\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} t(b)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma(a+\varepsilon) = p$ benutzt. Im Fall, dass $\gamma(s) = p$ für ein $s > a$ gilt, sei s_0 maximal mit dieser Eigenschaft. Auf der Teilkurve $\gamma\big([s_0,b]\big)$ gilt immer noch die obige Abschätzung und damit folgt erst recht das Ergebnis für die ganze Kurve.

(ii) Verläßt γ den Ball B_ρ, so sei $s_0 \in (a,b]$ maximal mit $\gamma\big([a,s_0)\big) \subset B_\rho$. Die obige Abschätzung ergibt dann

$$L(f \circ \gamma) = \underbrace{L\big(f \circ \gamma|_{[a,s_0]}\big)}_{\geq \rho} + \underbrace{L\big(f \circ \gamma|_{[s_0,b]}\big)}_{\geq 0} \geq \rho = L\big(f \circ h_\varphi([0,\rho])\big).$$

Die obige Längenabschätzung ist sogar strikt, wenn $\varphi' \neq 0$ ist. Daraus folgt die zweite Behauptung des Satzes. $\square$

Bemerkung. Lemma und Satz gelten auch in $n \geq 2$ Dimensionen; man muß dazu entsprechende Polarkoordinaten einführen, d.h. eine Parametrisierung durch $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$.

4.3. **Der Umfang von geodätischen Kreisen in Flächen.** Das Theorema egregrium sagt zwar, dass die Gauß-Krümmung eine intrinsisch definierte Größe ist, gibt aber nur die unhandliche Formel (17) als Grund dafür an. Wir können aber ein viel konkreteres intrinsisches "Messverfahren" für die Gauß-Krümmung angeben: Es reicht, die Bogenlängen von $S_r(p)$ für r in einer Umgebung von 0 zu kennen:

Satz 21 (Bertrand/Puiseux 1848)**.** *In einer zwei-dimensionalen Fläche $f: U^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Gauß-Krümmung K gilt für den Umfang von geodätischen Kreisen vom Radius $0 < r < \rho$:*

$$\ell(r) := L(f \circ S_r(p)) = 2\pi r\Big(1 - \frac{K(p)}{6}r^2 + O(r^3)\Big).$$

Beispiel. In $\mathbb{R}^2$ gilt natürlich $\ell(r) = 2\pi r$, in $\mathbb{S}^2$ gilt $\ell(r) = 2\pi \sin r$; beides in Übereinstimmung mit der Formel. Die Rotationsfläche der Traktrix, die *Pseudosphäre*, hat $K \equiv -1$ (siehe Aufgabe II.15); man kann zeigen, dass $\ell(r) = 2\pi \sinh r$ die Kreislänge ist. Bei negativer Gauß-Krümmung hat man also den "meisten Platz" auf der Fläche.

Lemma 22. *Für die Gauß-Krümmung in Polarkoordinaten gilt*

$$\tilde{K}(r,\varphi) = -\frac{\partial_{11}G(r,\varphi)}{G(r,\varphi)} \tag{25}$$

für $0 < r < \rho$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Insbesondere wird $-\frac{\partial_{11}G}{G}$ durch $K(p) = \tilde{K}(0,\varphi)$ stetig in $(0,\varphi)$ ergänzt.

Beweis. Wie in Übung 25 berechnen wir als Christoffel-Symbole für die Polarkoordinaten-Parametrisierung $\tilde{f}$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^1_{22} = -\frac{1}{2}\partial_1\tilde{g}_{22} = -G\partial_1 G, \\
&\tilde{\Gamma}^2_{22} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{22}\partial_2\tilde{g}_{22} = \frac{\partial_2 G}{G}, \qquad \tilde{\Gamma}^2_{12} = \tilde{\Gamma}^2_{21} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{22}\partial_1\tilde{g}_{22} = \frac{\partial_1 G}{G}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Die verbleibenden vier Symbole verschwinden. Aus (17) erhalten wir

$$\tilde{K} = \frac{\det \tilde{h}}{\det \tilde{g}} = \frac{1}{G^2}\det \tilde{h} = \frac{1}{G^2}\Big(\underbrace{\tilde{g}_{12}}_{=0}\tilde{R}^1_{112} + \underbrace{\tilde{g}_{22}}_{=G^2}\tilde{R}^2_{112}\Big) = \tilde{R}^2_{112}.$$

Nun setzen wir (14) ein:

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= \partial_2 \underbrace{\tilde{\Gamma}^2_{11}}_{\equiv 0} - \partial_1\tilde{\Gamma}^2_{12} + \underbrace{\tilde{\Gamma}^1_{11}}_{=0}\tilde{\Gamma}^2_{12} - \underbrace{\tilde{\Gamma}^1_{12}}_{=0}\tilde{\Gamma}^2_{11} + \underbrace{\tilde{\Gamma}^2_{11}}_{=0}\tilde{\Gamma}^2_{22} - \tilde{\Gamma}^2_{12}\tilde{\Gamma}^2_{21} \\
&= -\partial_1\frac{\partial_1 G}{G} - \Big(\frac{\partial_1 G}{G}\Big)^2 = -\frac{\partial_{11}G}{G}
\end{aligned}$$

Wir erhalten die behauptete Formel für $\tilde{K}(t,\varphi)$ für $0 < t < \rho$. Die Gauß-Krümmung ist stetig und daher wird die linke Seite durch $K(p)$ in $t = 0$ stetig ergänzt; also existiert auch der Grenzwert der rechten Seite für $t \to 0$. $\square$

Beweis des Satzes. Den geodätischen Kreis vom Radius r parametrisieren wir als $\varphi \mapsto \tilde{f}(r,\varphi)$ mit $\varphi \in [0,2\pi]$. Er hat die Länge

$$\ell(r) := L\big(\tilde{f}(r,[0,2\pi])\big) = \int_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\Big|\, d\varphi = \int_0^{2\pi} G(r,\varphi)\, d\varphi.$$

Nun entwickeln wir $G(r,\varphi)$ um $r=0$ als Taylorreihe. Nach Lemma 19 und (25) ist

$$G(0,\varphi)=0, \qquad \partial_1 G(0,\varphi)=1, \qquad \partial_{11}G(0,\varphi)=-K(p)G(0,\varphi)=0. \tag{27}$$

Weiterhin ist für jedes (r,φ)

$$\partial_{111}G=\partial_1\big(\partial_{11}G\big)=-\partial_1(G\tilde K)=-(\partial_1 G)\tilde K-G\partial_1\tilde K.$$

Durch Einsetzen von $(0,\varphi)$ erhält man wegen (27) den Grenzwert $\partial_{111}G(0,\varphi)=-K(p)$. Es folgt

$$G(r,\varphi)=r-\frac{K(p)}{3!}r^3+O(r^4)$$

und daher, wie behauptet, auch

$$\ell(r)=\int_0^{2\pi} r-\frac{K(p)}{6}r^3+O(r^4)\,d\varphi=2\pi r-2\pi\frac{K(p)}{6}r^3+O(r^4).$$

□

`21. Vorlesung, Donnerstag 4.7.02`

Wir wollen nun präzisieren, was eine "verzerrungsfreie Abbildung" ist.

Definition. Zwei parametrisierte Flächenstücke $f_1\colon U_1\to\mathbb{R}^m$ und $f_2\colon U_2\to\mathbb{R}^k$ heißen *isometrisch*, wenn es Umparametrisierungen $\tilde f_1\colon \tilde U_1\to\mathbb{R}^m$ von f_1 und $\tilde f_2\colon\tilde U_2\to\mathbb{R}^k$ von f_2 gibt, so dass $\tilde g_1=\tilde g_2$ gilt.

Es würde natürlich reichen, nur für eine Fläche eine Umparametrisierung zu wählen.

Beispiel. 1. Zylinder, Ebene und Kegel sind lokal isometrisch.
2. Katenoid und Helikoid sind lokal isometrisch.

In beiden Beispielen setzt sich die Isometrie nicht zu einer (globalen) Bijektion der Bildmengen $\tilde f_1(\tilde U_1)$ und $\tilde f_2(\tilde U_2)$ fort.

Das Theorema egregium sagt, dass zwei isometrische Flächen auch dieselben Gauß-Krümmungen in den entsprechenden Punkten besitzen. Will man die Umkehrung dieser Aussage diskutieren, so kann man zu gegebener Gauß-Krümmung K die Gleichung (25) als Differentialgleichung für G mit Anfangswerten $G(0,\varphi)=0$, $\partial_1 G(0,\varphi)=1$ auffassen. Hat man also bezüglich Polarkoordinaten dieselben Gauß-Krümmungen $K_1(r,\varphi)=K_2(r,\varphi)$, so erhält man $G_1(r,\varphi)=G_2(r,\varphi)$, und damit sind die betreffenden Flächen f_1 und f_2 isometrisch nach Eingeschränkung auf Polarkoordinatenbälle.

Für den Fall konstanter Krümmung K kann man die Differentialgleichung $G(r,\varphi)K=-\partial_{11}G(r,\varphi)$ explizit lösen:

$$G(r,\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt K}\sin\big(\sqrt K r\big) & \text{für } K>0,\\ r & \text{für } K\equiv 0,\\ \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh\big(\sqrt{-K}r\big) & \text{für } K<0.\end{cases}$$

Satz 23. *Zwei Flächen derselben konstanten Gauß-Krümmung K sind* lokal isometrisch, *d.h. je zwei Punkte auf den Flächen besitzen Umgebungen, auf denen die Flächen isometrisch sind.*

Der Hauptsatz der Kurventheorie enthält die allgemeinere Aussage, dass gleiche Frenet-Krümmungen zu kongruenten Kurven führen. Bei Flächen kann man eine solche Aussage nicht treffen, weil man keine Parametrisierung nach Bogenlänge zur Verfügung hat. Auch die Polarkoordinatenparametrisierung steht in der Regel nur lokal, nicht global, zur Verfügung.

4.4. **Winkelsumme kleiner geodätischer Dreiecke.** Wir kommen nun zu einer anderen intrinsischen Deutung der Gauß-Krümmung.

Eine abgeschlossene Menge $\Delta\subset U$, , heißt *geodätisches Dreieck*, wenn $\partial\Delta$ aus drei (nichtkonstanten) geodätischen Teilkurven a,b,c besteht und das Innere von Δ homöomorph zur Kreisscheibe ist. Wie üblich bezeichnen wir die a,b,c gegenüberliegenden Eckpunkte mit A,B,C, und die Winkel dieser Ecken mit $0<\alpha,\beta,\gamma<2\pi$.

Weil wir gleich das Integral der Gauß-Krümmung verwenden wollen, möchten wir an das Flächenelement erinnern. Im zweidimensionalen Fall mißt

$$\operatorname{area}\big(f(U)\big):=\int_U|\partial_1 f\times\partial_2 f|$$

den Inhalt einer eingebetteten Fläche. Wegen $|\partial_1 f\times\partial_2 f|^2+\langle\partial_1 f,\partial_2 f\rangle^2=|\partial_1 f|^2|\partial_2 f|^2$ gilt

$$\operatorname{area}\big(f(U)\big):=\int_U\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,dx\,dy.$$

Tatsächlich gibt $\int_U\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1\dots dx_n$ in jeder Dimension den Flächeninhalt an. Natürlich ist die Definition des Inhalts nur sinnvoll, weil sie parametrisierungsunabhängig ist.

Wir müssen zunächst die geodätischen Bälle noch weiter verkleinern.

Definition. Eine geodätische Kreisscheibe $B_\rho(p)$ heißt *konvex*, wenn $\exp_p\colon B_\rho^g\to U$ Diffeomorphismus ist und für die Polarkoordinatendarstellung gilt $\partial_1 G(t,\varphi)>0$ für alle $0<t<\rho$ und $\varphi\in\mathbb{R}$.

Geodätische Kreisscheiben von kleinem Radius sind konvex, denn $\partial_1 G$ ist stetig und $\partial_1 G(0,\varphi)=1$. In $\mathbb{R}^2$ sind alle Kreisscheiben konvex, für $\mathbb{S}^2$ kann man bis zur Hemissphäre gehen. Der Name "konvex" bezieht sich darauf, dass zwei Punkte in einer geodätischen Kreisscheibe durch eine Geodätische verbunden werden, die ganz innerhalb der Kreisscheibe verläuft; wir zeigen dies hier allerdings nicht.

Satz 24 (Gauß 1827). *Liegt ein Dreieck Δ ganz in einer konvexen geodätischen Kreisscheibe B_ρ um einen der drei Eckpunkte des Dreiecks, so gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_\Delta K\, dA. \tag{28}$$

Das Integral $\int_\Delta K\, dA$ nennt man auch die *Totalkrümmung* über das Dreieck Δ.

Beispiele. Für Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ ist dies die bekannte Formel für die Winkelsumme. In $\mathbb{S}^2$ erhält man $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \operatorname{area}(\Delta)$; für die Pseudosphäre steht rechts $-\operatorname{area}(\Delta)$.

Weil K stetig ist, erhält man insbesondere den Grenzwert

$$K(p) = \lim_{\Delta\to p} \frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\operatorname{area}(\Delta)};$$

dabei sagen wir $\Delta_i \to p$, wenn die Dreiecke Δ_i noch in geodätischen Kreisscheiben $B_{r(i)} \ni p$ liegen, wobei $r(i) \to 0$.

Beweis. Wir nehmen an $\Delta \subset B_\rho(A)$ und führen durch $(t,\varphi) \mapsto \tilde f(t,\varphi)$ Polarkoordinaten um A; das Dreieck wird dann durch eine Teilmenge $\tilde\Delta \subset \tilde U := (0,\rho)\times\mathbb{R}$ parametrisiert. Wir müssen $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \int_{\tilde\Delta} \tilde K G\, dt d\varphi$ zeigen.

Während b, c radiale Geodätische sind, haben wir für a die Polarkoordinatendarstellung

$$a\colon [0,\alpha] \to \tilde U, \qquad a(\varphi) := \big(t(\varphi),\varphi\big), \qquad a(0)=B, \quad a(\alpha) = C. \tag{29}$$

Hierbei hat a nicht unbedingt konstante Geschwindigkeit: $\varphi \mapsto a(\varphi)$ ist vielmehr Umparametrisierung einer Geodätischen. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Geodätische kann die Kurve a nicht tangential an eine radiale Geodätische werden; also ist φ monoton längs a, und wir können tatsächlich a als Funktion von φ schreiben.

Aus Lemma 19 folgt, dass durch

$$e_1 \qquad \text{und} \qquad E_2(t,\varphi) := \frac{1}{G(t,\varphi)} e_2 = \Big(0, \frac{1}{G(t,\varphi)}\Big)$$

eine g-Orthonormalbasis auf $\tilde U$ erklärt wird. Dabei hat e_1 ein Radialfeld als Bild unter df, während E_2 tangential an die geodätischen Kreise ist.

Wir benötigen die kovariante Ableitung von E_2 längs $a(\varphi) = \big(t(\varphi),\varphi\big)$. Zunächst ist

$$1 = \|E_2\|^2 = g(E_2,E_2) \Longrightarrow g\Big(\frac{DE_2}{d\varphi}, E_2\Big) = 0,$$

d.h. die zweite Komponente von $\frac{dE_2}{d\varphi}$ verschwindet. Die erste Komponente berechnen wir mit Hilfe der Christoffel-Symbole (siehe (26)) zu

$$\Big(\frac{DE_2}{d\varphi}\Big)^1 = E_2'^1 + \tilde\Gamma^1_{22} a'^2 E_2^2 = -G\partial_1 G \frac{1}{G} = -\partial_1 G.$$

Es gilt also insgesamt

$$\frac{DE_2}{d\varphi} = -\partial_1 G\, e_1. \tag{30}$$

Wir halten noch ein Nebenergebnis fest. Die Rechnung gilt speziell für die Kreislinienparametrisierungen $a(\varphi) := (t,\varphi)$ für jedes feste $0 < t < \rho$. Weil das Einheitstangentialfeld nicht parallel ist, sofern $\partial_1 G \neq 0$ gilt (Konvexitätsannahme), sind nach Lemma 16 die geodätischen Kreise nicht geodätisch. Wegen des Eindeutigkeitssatzes bedeutet dies für die ursprüngliche Geodätische $a(\varphi)$, dass sie nicht auf einem offenen Intervall mit einem Kreis übereinstimmen kann. Daher gilt $t'(\varphi) = 0$ nur in isolierten Punkten.

Bezüglich der Orthonormalbasis können wir $a'(\varphi)$ für jedes φ als eine Linearkombination

$$a'(\varphi) = (t',1) = t'(\varphi)e_1 + e_2(t,\varphi) = t'(\varphi) e_1 + G(t,\varphi) E_2\big(t(\varphi),\varphi\big) \neq 0$$

darstellen. Nun betrachten wir eine stetige Wahl des Winkels

$$\vartheta\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}, \qquad \vartheta(\varphi) = \angle_g\big(a'(\varphi), e_1\big), \tag{31}$$

es ist egal, ob wir den Winkel bezüglich g oder $\tilde g$ messen. Im folgenden lassen wir die Stellen weg, d.h. ϑ steht für $\vartheta(\varphi)$ und G für $G\big(t(\varphi),\varphi\big)$, der Strich bezeichnet weiter die φ-Ableitung. Dann ist

$$\|a'\| \cos\vartheta = \tilde g\big(e_1, a'\big) = t' \quad \text{ und } \quad \sin\vartheta = \tilde g\Big(E_2, \frac{a'}{\|a'\|}\Big)$$

Weil a die Reparametrisierung einer Geodätischen ist, ist die Einheitstangentialrichtung $\frac{a'}{\|a'\|}$ parallel (Lemma 16). Daher gilt

$$\begin{aligned} t'\vartheta' &= \|a'\| \cos\vartheta\, \vartheta' = \|a'\| (\sin\vartheta)' = \|a'\| \frac{d}{d\varphi} \tilde g\Big(E_2, \frac{a'}{\|a'\|}\Big) \overset{\frac{a'}{\|a'\|}\text{ par.}}{=} \|a'\|\, \tilde g\Big(\frac{DE_2}{d\varphi}, \frac{a'}{\|a'\|}\Big) \\ &\overset{(30)}{=} g\big(-\partial_1 G\, e_1,\ t' e_1 + G E_2\big) = -\partial_1 G\, t'. \end{aligned}$$

Da $t' \neq 0$ auf einer dichten Menge gilt, folgt $\vartheta' = -\partial_1 G$.

`22. Vorlesung, Mittwoch 10.7.02` ________________

Durch $\vartheta(0) := \pi - \beta$ legen wir die 2π-Unbestimmtheit von $\vartheta(\varphi)$ fest. Weil a immer transversal zu den radialen Geodätischen bleibt, ergibt sich daraus $\vartheta(\alpha) = \gamma$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\beta + \gamma - \pi = \vartheta(\alpha) - \vartheta(0) &= \int_0^\alpha \vartheta'(\varphi)\,d\varphi = -\int_0^\alpha \partial_1 G\big(t(\varphi),\varphi\big)\,d\varphi \\
&= -\int_0^\alpha \Big[\partial_1 G(0,\varphi) + \int_0^{t(\varphi)} \partial_{11} G(s,\varphi)\,ds\Big] d\varphi \\
&\overset{(25)}{=} -\int_0^\alpha \Big[1 - \int_0^{t(\varphi)} \tilde K(s,\varphi) G(s,\varphi)\,ds\Big] d\varphi \\
&= -\alpha + \int_0^\alpha \int_0^{t(\varphi)} \tilde K(s,\varphi) G(s,\varphi)\,ds d\varphi
\end{aligned} \tag{32}
$$

Dies ist die Behauptung. □

Da der Beweis lang war, folgt eine kurze Interpretation. Der entscheidende Schritt war, in (32) das Integral von ϑ' zu berechnen. Im Parameterbereich (t,φ) erscheint $\tilde\Delta$ als ein Viereck: Die Ecke A wird durch $(0,[0,\alpha])$ parametrisiert, die radialen Geodätischen haben beide konstante φ-Werte. Definiert man entlang aller Randkurven $\partial\tilde\Delta$ den Winkel ϑ wie in (31), so erhält man $\vartheta \equiv 0$ längs der beiden radialen Geodätischen b und c. Der Randterm in (32) sagt, dass längs der Ecke A der Wert von ϑ asymptotisch um α dreht. Längs der Geodätischen a haben wir ϑ als Integral über die radialen Geodätischen ausgedrückt, und jeweils KdA als Beitrag festgestellt.

Wir geben nun eine wichtige Interpretation der Aussage des Satzes, die auch noch für den verallgemeinerten (inneren) Krümmungsbegriff in mehreren Dimensionen gültig ist. Wir wollen eine Parallelverschiebung eines Vektors X längs $\partial\Delta$ betrachten. Wir vergleichen mit dem Tangentialvektor T. Es sei ξ eine stetige Wahl des Winkels von X und τ eine von T. Weil wir nur die Differenz $\xi - \tau$ betrachten wollen, kommt es auf den absoluten Wert der Winkel nicht an: er sei irgendwie gewählt. Längs c setzen wir beispielsweise $X := T$, d.h. $\xi = \tau$. Hinter der Ecke B gilt dann $\xi + (\pi - \beta) = \tau$ oder $\xi = \tau + \beta - \pi$. Nun betrachten wir die nach einem ganzen Umlauf längs c erhaltenen Felder. Um sie von X und T zu unterscheiden, nennen wir sie X' und T', und bezeichnen ihre Winkel mit ξ' und τ'. Weil der Effekt der Ecken C und A genauso wie der von B ist, erhalten wir

$$\xi' = \tau' + (\alpha - \pi) + (\beta - \pi) + (\gamma - \pi).$$

Andererseits gilt $\tau' = \tau + 2\pi$, denn wie bei jeder einfachen geschlossenen Kurve dreht der Tangentialvektor um 2π pro Umlauf (vergleiche den Hopfschen Umlaufsatz). Wir erhalten

$$\xi' - \xi = (\tau + 2\pi) + (\alpha - \pi) + (\beta - \pi) + (\gamma - \pi) - \tau = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

und damit die linke Seite von (28). Also können wir sagen:

Korollar 25. *Bei Parallelverschiebung um das Dreieck Δ dreht ein paralleles Vektorfeld genau um den Winkel $\int_\Delta K\,dA$. Die Parallelverschiebung längs Dreiecken ist also genau dann von der Wahl des Dreiecks unabhängig, wenn $K \equiv 0$ gilt.*

Statt der letzten Aussage kann man quantitativ sagen: Die Gauß-Krümmung mißt die Stärke der Weg-Abhängigkeit der Parallelverschiebung.

4.5. **Der Satz von Gauß-Bonnet.** Erlaubt ein (großes) geodätisches Dreieck eine Unterteilung in zwei (kleine) geodätische Dreiecke, auf die man den Satz 24 von Gauß anwenden kann, so erhält man durch Summation die gleiche Aussage. Ergänzen sich beispielsweise γ und γ' zu π, und α, α', $\beta + \beta'$ sind Winkel des großen Dreiecks, so gilt

$$\int_{\Delta\cup\Delta'} KdA = \alpha + \beta + \gamma - \pi + \alpha' + \beta' + \gamma' - \pi = \alpha + (\beta + \beta') + \alpha' - \pi,$$

d.h. man gewinnt (28) für das große Dreieck. Man kann entsprechend fortfahren. Umgekehrt gilt die Aussage von Satz 24 tatsächlich für beliebig große geodätische Dreiecke, die homöomorph zur Kreisscheibe sind: Hierzu muss man zeigen, dass es unterteilende Geodätische gibt, die das Dreieck in hinreichend kleine Dreiecke zerlegen.

Beispiel. Auf $\mathbb{S}^2$ gibt es geodätische Zweiecke. Auf einer Fläche mit $K \le 0$ kann es sie aber nicht geben. Durch Unterteilung in Dreiecke sieht man nämlich, dass ein geodätisches Zweieck mit Winkeln α, β erfüllt $\alpha + \beta = \int K\,dA$. Für $K \le 0$ ist dies unmöglich.

Was passiert, wenn wir entsprechend eine kompakte Fläche ohne Rand vollständig mit Dreiecken pflastern? Wir betrachten dazu allgemeine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M in $\mathbb{R}^m$. Eine *Triangulierung* von M ist eine endliche Familie von Dreiecken $(\Delta_i)_{1\le i\le F}$, so daß
(i) $\bigcup_{i=1}^F \Delta_i = M$ und
(ii) $\Delta_i \cap \Delta_j$ ist entweder eine Kante, eine Ecke, oder leer.

Definition. Besitzt M eine geodätische Triangulierung mit E Ecken, K Kanten und F Flächen, so heißt $\chi := E - K + F$ die *Euler-Charakteristik*.

Beispiele. χ für $\mathbb{S}^2$ mit Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-Triangulierung ist 2. Für den Torus ist $\chi = 0$; verwendet man beispielsweise vier Dreiecke, so erhält man $\chi = 2 - 6 + 4$.

Die folgenden topologische Tatsache benutzen wir ohne Beweis für die globale Version des Satzes von Gauß-Bonnet: Jede kompakte Untermannigfaltigkeit besitzt eine Triangulierung mit geodätischen Dreiecken. Dabei kann man verlangen, dass die Dreiecke so klein sind, dass sie noch in den geodätischen Kreisscheiben um eine ihrer Ecken liegen.

Satz 26 (Gauß-Bonnet). *Sei M eine kompakte orientierbare 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \, dA$$

für jede Triangulierung von M.

Dabei ist das Integral rechts durch Summation über geeignete Teilmengen definiert. Insbesondere ist die Euler-Charakteristik $\chi(M)$ unabhängig von der gewählten Triangulierung. Dies kann man auch direkt beweisen.

Bemerkung. Die Euler-Charakteristik ist aber auch invariant unter "stetigen Verformungen", denn man kann dafür auch die Triangulierung stetig anpassen, so dass $E - K + F$ unverändert bleibt. Dies macht man in der Topologie exakt, und sagt dann die Euler-Charakteristik ist eine *topologische Invariante*. Es ist dem Integral $\int_M K \, dA$ nicht direkt anzusehen, dass es "verformungsinvariant" ist: Für Autoreifen und Kaffeetasse fällt die Totalkrümmung gleich gross aus!

Beweis. Wie zuvor erwähnt gibt es eine Triangulierung $\{\Delta_i \mid i = 1, \dots, F\}$, so dass für jedes Dreieck Δ_i Satz 24 anwendbar ist. Wir summieren über alle Dreiecke und beachten, dass sich die Winkel in jeder der E Ecken zu 2π addieren:

$$\int_M K \, dA = \sum_{i=1}^F \int_{\Delta_i} K \, dA = \sum_{i=1}^F \big(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi\big) = 2\pi E - \pi F$$

Nun wollen wir noch F anders ausdrücken. Jedes Dreieck hat 3 Kanten, aber mit $3F$ zählen wir jede Kante der gesamten Triangulierung doppelt, denn jede Kante berandet zwei verschiedene Dreiecke. Daher ist $3F = 2K$, oder $-F = 2F - 2K$. Es folgt die Behauptung. □

Ein Resultat der Differentialtopologie ist der *Flächenklassifikationssatz*. Die Euler-Charakteristik einer kompakten orientierbaren 2-dimensionalen (Unter-)Mannigfaltigkeit nimmt nur die Werte $2 = \chi(\mathbb{S}^2)$, $0 = \chi(T^2)$, $-2 = \chi(\text{Fläche mit 2 Löchern})$, $\dots$ an, d.h. $\chi(M) = -2g + 2$ mit $g \in \mathbb{N}_0$ dem *Geschlecht* (Löcherzahl) der Fläche. Ist weiter $\chi(M) = \chi(M')$, so ist M homöomorph zu M'. Diese Aussagen beweist man mit Morse-Theorie (siehe z.B. [M], Kapitel 12).

Nehmen wir den Flächenklassifikationssatz an, so erhalten wir:

Korollar 27. *Sei M eine kompakte orientierbare 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit konstanter Gauß-Krümmung K.*
(i) Ist $K > 0$, so ist M diffeomorph zu $\mathbb{S}^2$ ($g = 0$).
(ii) Ist $K = 0$, so ist M diffeomorph zum Torus ($g = 1$).

(iii) Ist $K < 0$, so ist M diffeomorph zu einer Fläche vom Geschlecht $g > 1$ vom Inhalt $\frac{1}{|K|} 2\pi |\chi(M)|$.

5. ÜBUNGSAUFGABEN

5.1. Geodätische.

Aufgabe 1 – Existenz von Flächen bei vorgegebenen Geodätischen (GB 02):

Finden Sie Flächen $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und alle Ursprungskreise sind Geodätische.
b) Wie in a), jedoch soll kein Strahl durch 0 Geodätische sein.

Aufgabe 2 – Geodätische und Asymptotenlinien (Bergner 04):

Zeigen Sie: Eine Kurve $c = f \circ \gamma$ ist genau dann sowohl Geodätische als auch Asymptotenlinie, wenn diese Kurve ein Stück einer Geraden ist.

Aufgabe 3 – Ebene Kurven, Geodätische und Krümmungslinien (GB 02):

Wir betrachten eine Kurve $c = f \circ \gamma$ in einer Fläche $f: U \to \mathbb{R}^3$, mit zwei der drei Eigenschaften:
(i) c ist geodätisch,
(ii) c ist Krümmungslinie,
(iii) c ist eben (also in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten).

a) Beweisen Sie, dass (iii) aus (i) und (ii) folgt.
Tipp: Leiten Sie $c' \times n$ ab.
b) Geben Sie Gegenbeispiele dafür an, dass weder (i) noch (ii) von den beiden anderen beiden Eigenschaften impliziert werden.

Aufgabe 4 – Längentreue Parametrisierung (Bergner 04):

Die Parametrisierung $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ einer Fläche nennt man längentreu, falls sie Längen von Kurven erhält, d.h. für jede Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ mit $c := f \circ \gamma$ gilt $L(\gamma) = L(c)$ für die Längen dieser Kurven.

a) Geben Sie eine längentreue Parametrisierung des Zylinders an.
b) Zeigen Sie: Eine Parametrisierung ist genau dann längentreu, falls $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt, also die erste Fundamentalform mit der Einheitsmatrix übereinstimmt.
c) Zeigen Sie nun, dass das Bild einer Geraden unter einer längentreuen Abbildung eine Geodätische ist.

Aufgabe 5 – Flächentreue Parametrisierung (Bergner 04):

Eine Parametrisierung $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ nennt man flächentreu, falls für die erste Fundamentalform $\det(g_{ij}) = 1$ gilt. Wir wollen zeigen, dass sich durch geeignete Umparametrisierung jede Fläche lokal flächentreu parametrisieren lässt.

a) Betrachten Sie zu $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die umparametrisierte Fläche
$$\tilde{f}(u, v) := f(\varphi(u, v), v)$$
mit einer gewissen Funktion $\varphi(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform $\tilde{g}_{ij}$ von $\tilde{f}$ sowie $\det(\tilde{g}_{ij})$.
b) Leiten Sie aus der Bedingung $\det(\tilde{g}_{ij}) = 1$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(u)$ her, in der v als Parameter eingeht. Zeigen Sie, dass diese bei geeignet gestellten Anfangswerten lösbar ist.

Aufgabe 6 – Lasso und Kegel (GB 02):

Wir betrachten einen Rotationskegel, den man auf ein Segment in der Ebene vom Winkel $0 < \alpha \le 360°$ abrollen lassen kann; sein Öffnungswinkel $0 < \varphi \le 90°$ erfüllt $\sin\varphi = \frac{\alpha}{2\pi}$. Wir fangen die Kegelspitze mit einem Lasso ein. Unser (nicht ganz fachgerechtes) Lasso soll aus einer Schlinge der festen Länge L bestehen, an die mit einer Öse ein weiteres Seilstück angehängt ist. Wir sehen von Dicke und Gewicht des Seiles ab, und nehmen an dass es reibungslos auf dem Kegel gleitet. Wenn wir das Seilstück genau radial von der Kegelspitze wegziehen, für welche Werte von φ kann das Lasso eine feste Lage erhalten, und für welche rutscht es stets zur Spitze hin ab?

Aufgabe 7 – Fläche in Gaußscher Form (Bergner 04):

Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. es gilt $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$ für die erste Fundamentalform.

a) Zeigen Sie, dass die Kurven $c(s) := f(s, t)$ für festes t Geodätische sind.
b) Zu nach Bogenlänge parametrisierter Kurve $(r, h)(t)$ betrachten wir die Rotationsfläche
$$f(t, \varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)) .$$
Zeigen Sie, dass f eine Parametrisierung in Gaußscher Form ist und folgern Sie, dass die Meridiankurve $c(t) := f(t, \varphi)$ für festes φ eine Geodätische ist.

Aufgabe 8 – Christoffelsymbole einer Fläche in Gaußscher Form (Bergner 04):

a) Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$. Berechnen Sie alle acht Christoffelsymbole in Abhängigkeit von $G(p) := g_{22}(p)$.
b) Wenden Sie a) speziell auf eine Rotationsfläche $f(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve $(r, h)(t)$ an. Es sei $\gamma(s) = (t(s), \varphi(s))$ eine Kurve, so dass $c := f \circ \gamma$ eine Geodätische ist. Leiten Sie die Differentialgleichungen
$$0 = t''(s) - r(t(s))r'(t(s))(\varphi'(s))^2 \quad , \quad 0 = \varphi''(s) + 2\frac{r'(t(s))}{r(t(s))}t'(s)\varphi'(s)$$
her.
c) Wann sind die Meridiankurven $c(t) := f(t, \varphi)$ und Breitenkreise $c(\varphi) := f(t, \varphi)$ Geodätische?

Aufgabe 9 – Geodätische auf Rotationsflächen (GB 02):

Wir betrachten die Rotationsfläche $f(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ zu nach Bogenlänge parametrisierter Kurve $(r,h)(t)$. Es sei $\gamma(s) = (t(s),\varphi(s))$ eine reguläre Kurve und $c := f\circ\gamma$. Weiter sei $\vartheta(s)$ der Winkel zwischen der Kurve $c(s)$ und dem Breitenkreis durch $c(s)$, d.h.

$$\cos\vartheta(s) = \frac{\langle c'(s), \partial_2 f(\gamma(s))\rangle}{|c'(s)||\partial_2 f(\gamma(s))|}\,.$$

a) Zeigen Sie die Hilfsaussage
$$\cos\vartheta(s) = \frac{r(t(s))\varphi'(s)}{|c'(s)|}\,.$$
b) Zeigen Sie: Ist γ geodätisch in f (also insbesondere $|c'|$ konstant), so ist der Ausdruck
$$r(t(s))\cos\vartheta(s)$$
konstant als Funkion von s. Dies wird der *Satz von Clairaut* genannt.
Hinweis: Benutzen Sie a) sowie die beiden Differentialgleichungen für Geodätische aus Teil b) der letzten Aufgabe.
c) Wir setzen nun voraus, dass $|c'|$ konstant ist sowie $t(s)\neq 0$. Zeigen Sie: Ist der Ausdruck $r(t(s))\cos\vartheta(s)$ konstant in s, so ist γ eine Geodätische in f.
Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Differentialgleichungen von Teil b) der letzten Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe 10 – Sinussatz der sphärischen Geometrie (GB 02):

Auf der Späre $\mathbb{S}^2$ betrachten wir ein Dreieck, d.h. drei Punkte jeweils verbunden durch Geodätische. Die Seitenlängen bezeichnen wir mit $a,b,c<\pi$ und die den entsprechenden Seiten gegenüberliegenden Winkel mit $\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi]$. Zeigen Sie
$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}\,.$$
Tipp: Legen Sie eine Ecke des Dreiecks auf die Drehachse der Kugel und wenden Sie den Satz von Clairaut aus der letzten Aufgabe auf die gegenüberliegende Seite an.

Aufgabe 11 – Asymptotik von Geodätischen auf Rotationsflächen (GB 02):

Zu einer regulären Meridiankurve $(r,h)\colon [a,b]\to\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ betrachten wir die Rotationsfläche $f(t,\varphi) = \big(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)\big)$. Dabei sei $r(a)=R$, $r(b)=\rho$ und $r(t)>\rho>0$ für $t\in[a,b)$. Es parametrisiere $\eta\colon\varphi\mapsto(b,\varphi)$ den Breitenkreis $e=f\circ\eta$ vom Radius ρ auf der Fläche.

Wir betrachten eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma(s)=\big(t(s),\varphi(s)\big)$ in der Rotationsfläche, deren Definitionsbereich $[0,S]$ maximal gewählt sei. Für γ soll gelten: $r\big(t(0)\big)\cos\vartheta(0)=\rho$ sowie $t(0)=a$ (der Startradius ist also R).

Benutzen Sie den Satz von Clairaut (Aufgabe 9), um die folgenden Aufgabenteile zu behandeln.

a) Können sich die Geodätische $c=f\circ\gamma$ und der Breitenkreis $e=f\circ\eta$ schneiden? Versuchen Sie diese Situation zu verstehen (keine Rechnung nötig).
b) Zeigen Sie, dass in jedem Fall c dem Breitenkreis e beliebig nahe kommt.
c) Falls e geodätisch ist, schneiden sich c und e nicht, so daß c asymptotisch zum geodätischen Breitenkreis e wird.

Aufgabe 12 – Geodätische auf dem Rotationstorus (GB 02):

a) Benutzen Sie die letzte Aufgabe, um die Geodätischen auf dem Rotationstorus mit $r(t)=B+b\cos t$, $h(t)=b\sin t$ für $B>b>0$ zu diskutieren. Bestimmen Sie drei qualitativ verschiedene Fälle, je nach Vorzeichen von $(B-b)-\rho$, und finden Sie sie auf dem abgebildeten Torus.
b) Geben Sie eine Rotationsfläche an, für die eine Geodätische $c(s)$ asymptotisch zu zwei verschiedenen Breitenkreisen wird (für $s\to\pm\infty$).

Aufgabe 13 – Rotationsparaboloid (Schueth 00):

Wir betrachten das Rotationsparaboloid
$$f\colon U:=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \qquad (t,\varphi)\mapsto\big(r(t)\cos\varphi,\, r(t)\sin\varphi,\, h(t)\big)\in\mathbb{R}^3$$
mit $r(t):=t$, $h(t):=t^2$ für $t>0$. Sei $\gamma(s)=\big(t(s),\varphi(s)\big)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Geodätische mit $\|\gamma'(t)\|\equiv 1$. Wir nehmen an, dass γ kein Meridian ist, so dass nach dem Satz von Clairaut (Aufgabe 9) die Konstante
$$\rho :\equiv r\big(t(s)\big)\cos\vartheta(s) = r\big(t(s)\big)^2\varphi'(s) \overset{\text{hier}}{=} t^2(s)\varphi'(s)$$
von 0 verschieden ist. Nach eventueller Änderung der Durchlaufrichtung von γ können wir $\rho>0$ annehmen.

a) Zeigen Sie, dass $c=f\circ\gamma$ den Breitenkreis $r=\rho$ zu genau einem Zeitpunkt s_0 berührt; außerdem gilt $t'(s)<0$ für $s<s_0$ und $t'(s)>0$ für $s>s_0$.
b) Beweisen Sie $\varphi(s)\to\infty$ für $s\to\infty$ und $\varphi(s)\to-\infty$ für $s\to-\infty$.
Tipp: Zeigen Sie $\int_0^\infty\varphi'(s)\,ds=\rho\int_0^\infty\frac{1}{h(t(s))}\,ds$ und $h\big(t(s)\big)\le h\big(t(0)\big)+|s|$.
c) Folgern Sie aus a) und b), daß c sich unendlich oft selbst schneidet. Insbesondere findet man auf jeder Geodätischen, die nicht Meridian ist, Teilstücke, die bezüglich ihrer Endpunkte nicht die kürzeste Kurve darstellen.

Aufgabe 14 – Vollständigkeit von Geodätischen (Bergner 04):

Sei $f=f(x_1,x_2)\in C^3(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ ein Flächenstück mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen bis dritter Ordnung, d.h.
$$|\frac{\partial}{\partial x_i}f(p)|+|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(p)|+|\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}f(p)|\le M \quad \text{für } i,j,k=1,2$$
mit einer Konstanten $M\in\mathbb{R}$. Ferner gebe es ein $\varepsilon>0$, so dass $\det g_{ij}(p)>\varepsilon$ für $p\in\mathbb{R}^2$ gilt.

a) Zeigen Sie: Alle Geodätischen existieren global, d.h. der Definitionsbereich jeder Geodätischen lässt sich auf $\mathbb{R}$ ausdehnen.
b) Bleibt die Aussage aus a) auch richtig, wenn man eine der beiden Voraussetzungen weglässt?

Aufgabe 15 – $\mathsf{O}(n)$ ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ (GB 02):

a) Wir bezeichnen den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit $\mathsf{M}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie: Sind $A, B \in \mathsf{M}(n)$, so kann man das von $\mathbb{R}^{n^2}$ gegebene Standardskalarprodukt schreiben als $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(AB^t)$.
b) Wir bezeichnen den Vektorraum der schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen mit $\mathsf{o}(n)$, und den der symmetrischen mit $\mathsf{Sym}(n)$. Zeigen Sie, dass man bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die orthogonale Zerlegung $\mathsf{M}(n) = \mathsf{Sym}(n) \oplus \mathsf{o}(n)$ hat. Welche Dimensionen haben die Summanden?
c) Wir definieren nun eine Abbildung
$$\varphi\colon \mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathsf{Sym}(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \varphi(A) := A^t A.$$
Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(d\varphi_{1_n}) = \mathsf{o}(n)$ und $\mathrm{Bild}(d\varphi_{1_n}) = \mathsf{Sym}(n)$. (Leiten Sie $s \mapsto \varphi(1 + sA)$ ab!)
d) Wir wollen zeigen, dass die Gruppe $\mathsf{O}(n) := \{P \in \mathsf{M}(n) \mid \varphi(P) = 1_n\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Dazu müssen wir beweisen, dass Rang $d\varphi$ in *jedem* Punkt den Wert $\frac{n(n+1)}{2}$ hat. (*Tipp*: Berechnen Sie $d\varphi_P(A)$ mittels der Kurve $c(s) := P + sA$ für $A \in \mathsf{M}(n)$ und $P \in \mathsf{O}(n)$; zeigen Sie $\mathrm{Kern}(d\varphi_P) = \{P^{-1}A \in \mathsf{o}(n)\} = P\mathsf{o}(n)$).
Bemerkung: Eine (Unter-)Mannigfaltigkeit, die zugleich Gruppe ist (oder umgekehrt!), nennt man eine *Lie-Gruppe*.
e) Es sei $P \in \mathsf{O}(n)$. Was sind Tangentialraum $T_P\mathsf{O}(n)$ und Normalraum $N_P\mathsf{O}(n)$?
f) Zusatz: $\mathsf{O}(n)$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n^2}$, also eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathsf{M}(n)$. Weiterhin hat $\mathsf{O}(n)$ (wenigstens) zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 16 – Geodätische der Lie-Gruppe $\mathsf{SO}(n)$ (GB 02):

Für eine Matrix $A \in \mathsf{M}(n)$ definieren wir
$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$
wobei $A^0 := 1_n$.

a) Sofern Sie es nicht schon kennen, zeigen Sie: Die Reihe $\exp A$ konvergiert für jedes $A \in \mathsf{M}(n)$, so dass $\exp\colon \mathsf{M}(n) \to \mathsf{M}(n)$ (nehmen Sie dazu am besten $|a_{ij}| < \frac{C}{n}$ an).
b) Wir definieren durch $c(t) := \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$ eine Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$. und wollen die Identität $c(s+t) = c(s)c(t)$ beweisen. Dazu kann man nachweisen, dass beide Seiten dieselbe Differentialgleichung erfüllen und denselben Anfangswert haben. Wir fixieren s und setzen $f_s(t) := c(s)c(t)$ und $g_s(t) := c(s+t)$. Zeigen Sie zuerst, dass dieselbe Anfangsbedingung $f_s(0) = g_s(0)$ gilt. Berechnen Sie dann c' und benutzen Sie dies, um f_s und g_s nach t abzuleiten. Bestätigen Sie, dass beide Funktionen die gleiche Differentialgleichung erfüllen. Wieso folgt daraus die behauptete Identität? (Sie können die Identität auch anders zeigen – denken Sie daran, wie Sie im Grundstudium die Funktionalgleichung der e-Funktion bewiesen haben.)
c) Wir betrachten von nun an die Exponentialabbildung für $A \in \mathsf{o}(n)$. Zeigen Sie zuerst $(\exp A)^{-1} = (\exp A)^t$, also $\exp A \in \mathsf{O}(n)$. Mit Hilfe der Abbildung $s \mapsto \exp(sA)$ zeigen Sie dann sogar $\exp A \in \mathsf{SO}(n)$.
d) Benutzen Sie die Gleichung für c' aus b), um zu zeigen, dass $c(s) = \exp(sA)$ für $A \in \mathsf{o}(n)$ konstante Geschwindigkeit $|c'|$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ hat. (*Tipp*: Schreiben Sie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in der letzten Aufgabe als $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(AB^t)$).
e) Als krönenden Abschluss zeigen Sie nun, dass $c(s) := \exp(sA)$ für $A \in \mathsf{o}(n)$ eine Geodätische der Untermannigfaltigkeit $\mathsf{SO}(n)$ darstellt. (*Tipp*: Berechnen Sie dazu c'' und benutzen Sie die Beschreibung des Tangential- und Normalraums der Untermannigfaltigkeit $\mathsf{O}(n)$ aus der letzten Aufgabe.)

5.2. Integrabilitätsbedingungen und theorema egregium.

Aufgabe 17 – Gaußkrümmung einer Fläche in Gaußscher Form (Bergner 04):

Gegeben sei eine Fläche $f \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, also $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ sowie $G^2(p) := g_{22}(p)$ mit $G > 0$. Zeigen Sie für die Gaußkrümmung die Formel
$$K(u, v) = -\frac{G_{uu}}{G}\,.$$
Welche Formel erhält man speziell für Rotationsflächen mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve?

Aufgabe 18 – Mögliche Fundamentalformen (Bergner 04):

Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$, und für die zweite Fundamentalform gelte $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$ sowie $b_{22}(x, y) = b(x, y)$.

a) Wann sind sowohl Gauß- also auch Codazzigleichung erfüllt?
b) Nach dem Hauptsatz der Flächentheorie lässt sich dann eine Fläche finden, deren erste und zweite Fundamentalform mit der gegebenen übereinstimmen. Was ist die Gaußkrümmung dieser Fläche?
c) Geben Sie zwei Beispiele solcher Flächen an (oder charakterisieren Sie sämtliche Flächen).

Aufgabe 19 – Unmögliche Fundamentalformen (GB 02):

Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Wir betrachten zwei verschiedene zweite Fundamentalformen, beide mit $b_{12} = b_{21} = 0$ und mit (i) $b_{11} = 1$, $b_{22} = -1$ bzw. (ii) mit $b_{11}(x, y) = b_{22}(x, y) = (1 + x^2 + y^2)$. Zeigen Sie, dass es keine Flächen $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit den beiden Fundamentalformen geben kann:

a) Was müßte die Gauß-Krümmung sein?

b) Sind Gauß- und Codazzi-Gleichung erfüllt?

Aufgabe 20 – Die hyperpolische Halbebene (Bergner 04):

Auf $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ definiert man eine erste Fundamentalform (oder Metrik) g durch $g_{11}(x, y) = g_{22}(x, y) = \frac{1}{y^2}$ sowie $g_{12} = g_{21} = 0$.

a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung und lösen Sie danach die Differentialgleichung der Geodätischen.
Hinweis: Die Geodätischen in H ergeben sich als der Durchschnitt von H mit Geraden parallel zur y-Achse sowie Kreisen mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse.
b) Berechnen Sie die Gaußkrümmung der Halbebene.
c) Zwei Geodätische nennt man parallel, falls ihr Durchschnitt leer ist.
Zeigen Sie: Zu jeder Geodätischen γ und jedem nicht auf γ liegenden Punkt p gibt es unendlich viele zu γ parallele Geodätische durch p.

Bemerkung: Die hyperbolische Halbebene bildet eine Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom verletzt ist. Eine Immersion $f : H \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen ersten Fundamentalform läßt sich zwar nicht finden (Satz von Hilbert), für geeignete Teilmengen von H gelingt es aber: Die Rotationsfläche der Traktix ist ein solches Beispiel.

Index