Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
16.06.2006

Lineare Algebra II

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr“ oder „falsch“ oder keines von beiden an.

		wahr	falsch
(i)	Die Matrix $\begin{pmatrix} e & 9+2i \\ 9-2i & \pi \end{pmatrix}$ ist hermitesch.	$\square$	$\square$
(ii)	Die Matrix $\begin{pmatrix} e & i\pi \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist normal.	$\square$	$\square$
(iii)	Eine hermitesche Matrix hat nur reelle Eigenwerte.	$\square$	$\square$

Aufgabe G2 Ist V endlich-dimensional, so kann man Bilinearformen durch Matrizen beschreiben. Sei s eine Bilinearform und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Die Matrix

$$[[s]]_{\mathcal{B}} := (s(v_i, v_j))_{ij} \in K^{n\times n}$$

nennt man wie bei linearen Abbildungen die *darstellende Matrix von s* bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Durch sie ist s vollständig festgelegt. Genauer gilt:
Seien $v, w \in V$ und x bzw. y die Koordinaten von v bzw. w. Dann ist

$$s(v,w) = x^T \cdot [[s]]_{\mathcal{B}} \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot [[s]]_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ist V ein $K-$Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $\mathcal{B}$ eine Basis. Dann ist die Abbildung

$$s \mapsto [[s]]_{\mathcal{B}}$$

von den Bilinearformen auf V in $K^{n\times n}$ bijektiv, und s ist genau dann symmetrisch, wenn $[[s]]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch ist.

Die Beschreibung einer Bilinearform durch eine Matrix hat Ähnlichkeit mit der entsprechenden Beschreibung eines Endomorphismus. Ein wesentlicher Unterschied zeigt sich im Transformationsverhalten.

Transformationsformel Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, und sei $[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ die entsprechende Transformationsmatrix. Zeigen Sie, dass für jede Bilinearform s auf V gilt:

$$[[s]]_{\mathcal{B}} = {[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}}^T \cdot [[s]]_{\mathcal{A}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Man beachte, dass dagegen für einen Endomorphismus F von V gilt:

$$[F]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot [F]_{\mathcal{A}} \cdot [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}, \qquad \text{wobei } [\mathrm{id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)^{-1}$$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beweis obiger Aussage das folgende Lemma und beweisen Sie dessen Aussage.
Lemma: Gegeben seien $A, B \in K^{n\times n}$ derart, dass

$$x^T Ay = x^T By$$

für alle Spaltenvektoren $x, y \in K^n$. Dann ist $A = B$.

Aufgabe G3 Gegeben seien $F, G \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $G(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Zeigen Sie, dass $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x) \cdot G(y)$ eine Bilinearform ist, und bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G4 Eine Abbildung $q : V \to K$ wird eine *quadratische Form* genannt, wenn

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$, und

(ii) für alle $v, w \in V$ ist $q(v + w) - q(v) - q(w)$ eine symmetrische Bilinearform.

Wir nennen q die quadratische Form, die mit der symmetrischen Bilinearform s verknüpft ist. Ist $\mathrm{char}\, K \neq 2$, dann erhält man s aus q gemäß der Gleichung

$$s(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v + w) - q(v) - q(w)\right).$$

Dies nennt man **Polarisierung**. Zeigen Sie die Polarisationsformel.

Hausübungen

Abgabe am: 22.06.2006

Aufgabe H1 Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}\, K \neq 2$ und V ein $K-$Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf V in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform darstellen lässt.

Aufgabe H2 Sei V ein $3-$dimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum, $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V und s eine Bilinearform auf V mit

$$[[s]]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist und berechnen Sie $[[s]]_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe H3 Beweisen Sie die Polarisationsformel für hermitesche Formen: Ist s eine hermitesche Form mit assoziierter quadratischer Form q so gilt:

$$s(v, w) = \frac{1}{4}\left(q(v + w) - q(v - w) + iq(v + iw) - iq(v - iw)\right).$$

Dabei ist $q : V \to K$, mit $v \mapsto q(v) = s(v, v)$, für $v \in V$.

Aufgabe H4 Sei

$$A := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ist A normal? Existiert eine orthogonale Matrix S, sodass $S^T AS = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist? Geben Sie im Falle der Existenz die Transformationsmatrix S an.

Aufgabe H5 Wiederholung

(i) Orthonormalisieren Sie folgende $\mathbb{C}-$Basis des $\mathbb{C}^2$ mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie dabei das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{C}^2$: $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$.

(ii) Geben Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes $U = \text{lin}\,(v_1, v_2, v_3)$ des $\mathbb{R}^4$ an, mit:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dabei das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^4$:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = \sum_{k=1}^{4} x_k y_k.$$

Es empfiehlt sich, nach jedem Schritt des Verfahrens nachzuprüfen, ob das errechnete Teilsystem tatsächlich orthonormal ist.