**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
8.06.2006

# Lineare Algebra II

## 8. Übung

### Gruppenübungen

**Aufgabe G1** Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr" oder „falsch" oder keines von beiden an. $\mu_A$ bzw. $\chi_A$ bezeichnet das Minimalpolynom bzw. das charakteristische Polynom von $A \in K^{n\times n}$.

| | | wahr | falsch |
|---|---|---|---|
| (i) | $\mu_A$ teilt $\chi_A$. | ☐ | ☐ |
| (ii) | Jede Nullstelle von $\chi_A$ ist auch Nullstelle von $\mu_A$. | ☐ | ☐ |
| (iii) | $\mu_A^n$ teilt $\chi_A$. | ☐ | ☐ |

**Aufgabe G2** Beweisen Sie den Satz von *Cayley-Hamilton* durch direkte Rechnung für Matrizen $A \in K^{2\times 2}$.

**Aufgabe G3** Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden komplexen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie $B^3$ und $B^4$ als Linearkombination von $E, B$ und $B^2$ dar.

**Aufgabe G4** Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und $P \in K[t]$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F$, so ist $P^*(\lambda)$ ein Eigenwert von $P^{**}(F)$.

### Hausübungen

Abgabe am: 16/22.06.2006

**Aufgabe H1**

(i) Sei $K$ ein Körper und $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in K^{(m+n)\times(m+n)}$ eine Blockmatrix mit $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ und $D \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome gilt: $\chi_X = \chi_A \cdot \chi_D$.

(ii) Sei $\lambda \in K$. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(iii) Verallgemeinert sich die Aussage von (i) über charakteristische Polynome auch auf Minimalpolynome?

**Aufgabe H2** Seien $G, H$ Endomorphismen von $V$, die diagonalisierbar sind.
Unter welcher Bedingung ist es möglich, eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ zu finden, so dass $SGS^{-1}$ und $SHS^{-1}$ Diagonalmatrizen sind?
In diesem Fall nennt man die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar*.

(i) Zeigen Sie, dass aus der simultanen Diagonalisierbarkeit von $G, H$ die Kommuativität dieser beiden Endomorphisen, d.h. $GH = HG$

(ii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung obiger Aussage im folgenden Sinne gilt:

(a) Betrachten Sie zwei Zerlegungen von $V$ in Eigenräume von $G$ und $H$, die aufgrund der Diagonalisierbarkeit existieren. Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu den Eigenwerten von $G$ $H$-invariant sind und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie: $G|_{\mathrm{Eig}(G,\lambda_k)} \in \mathrm{End}(\mathrm{Eig}(G, \lambda_k))$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}(G, \lambda)$ von $G$ in eine direkte Summe von Unterräumen $E_i := \mathrm{Eig}(G, \lambda) \cap \mathrm{Eig}(H, \mu_i)$ zerlegt werden kann, wobei $\mu_i$ die Eigenwerte von $H$ sind.

(d) Konstruieren Sie eine Basis von $V$ bestehend aus Eigenvektoren von $G$ und $H$, was die simultane Diagonalisierbarkeit zeigt.

**Aufgabe H3** Testen Sie, ob die beiden unten stehenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ simultan diagonalisierbar sind. Im Falle der simultanen Diagonalisierbarkeit bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$, so dass $SAS^{-1}$ und $SBS^{-1}$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe H4** Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(t) = t^4 + 2t^2 + 1$

(i) In $\mathbb{R}$,

(ii) In $\mathbb{C}$.