Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
1.06.2006

Lineare Algebra II

7. Übung

Die Fahrplan-Algebra

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit der Linearen Algebra der Busverbindungen in Darmstadt. Es gilt, ein Streckennetz mitsamt Fahrzeiten für jede Einzelstrecke zu finden, so dass Anschlüsse und Mindestumsteigzeiten garantiert werden können.
Das Projekt ist in drei Teile unterteilt: „Die Max-Plus-Algebra", „Modellierung des Fahrplans" und „Berechnung eines Fahrplans".

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Die Max-Plus-Algebra
Um das Problem elegant mathematisch zu modellieren, benutzen wir die *Max-Plus-Algebra*. Wir betrachten als Grundmenge die reellen Zahlen vereint mit dem Symbol $-\infty$, also $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Mit der Vorschrift $-\infty < a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ werde die „$<$"-Relation von $\mathbb{R}$ zu einer Anordnung auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fortgesetzt.

1. Eine Addition auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} \oplus : (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto a \oplus b := \max(a,b). \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist. Finden Sie das neutrale Element. Gibt es ein Inverses zu gegebenem $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$?

2. Eine Multiplikation auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} \odot : (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto := \begin{cases} a+b & \text{falls } a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{falls } a = b = -\infty, \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

   Weisen Sie Assoziativität und Kommutativität nach. Finden Sie das neutrale Element und ein Inverses zu gegebenem $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

3. Überprüfen Sie das Distributivgesetz.

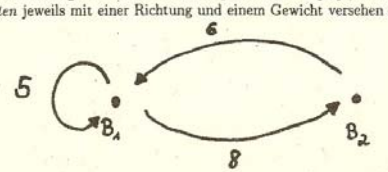
4. Welche algebraischen Strukturen entdecken Sie in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit den obigen Verknüpfungen?

5. Definieren Sie entsprechende Verknüpfungen für $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ und kontrollieren Sie, welche Rechenregeln gelten. Wie sehen neutrale und inverse Elemente aus?

Hausübungen

Abgabe am: 8.06.2006

Aufgabe H1 Modellierung des Fahrplans
Wir verdeutlichen die mathematische Modellierung des Zugfahrplanes an einem Beispiel. Das Bahnnetz geben wir durch einen gewichteten *Digraphen*, d.h. einen Graphen, dessen *Kanten* jeweils mit einer Richtung und einem Gewicht versehen sind.



Die beiden *Knoten* (auch *Ecken*) dieses Graphen stehen für zwei Haltestellen bzw. Bahnhöfe. Eine gerichtete Kante zeigt eine geplante Zugverbindung an, ihr Gewicht ist die Fahrzeit. Nun soll ein Fahrplan gefunden werden. Dabei soll jeder Zug auf alle Anschlusszüge warten. Umsteigezeiten sind in die Fahrtzeiten eingerechnet. Der Fahrplan soll sich periodisch wiederholen.
Im Bahnhof B_1 mögen zwei Züge, im Bahnhof B_2 möge ein Zug warten. Es bezeichnet $x_i(k)$ die $k-$te gemeinsame *Abfahrtszeit* aller Züge am Bahnhof B_i. In unserem Beispiel muss am ersten Bahnhof gewartet werden, bis sowohl der Zug vom Bahnhof B_2 als auch der vereinfacht abgebildete Zug durch das Hinterland von B_1 angekommen ist. D.h. es muss gelten

$$x_1(k+1) = \max(x_1(k)+5, x_2(k)+6) = 5 \odot x_1(k) \oplus 6 \odot x_2(k)$$

und analog

$$x_2(k+1) = 8 \odot x_1(k).$$

Für

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

ist das vollständige System also

$$x(k+1) = A \odot x(k) := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -\infty \end{pmatrix} \odot x(k).$$

Formal ist die Matrix A die transponierte *Adjazenzmatrix* des Digraphen, d.h. der Eintrag A_{ij} ist das Gewicht der Kante von Knoten j zu Knoten i, bzw. $-\infty$, wenn keine Kante existiert.

1. Definiere $e \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^2$ als $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

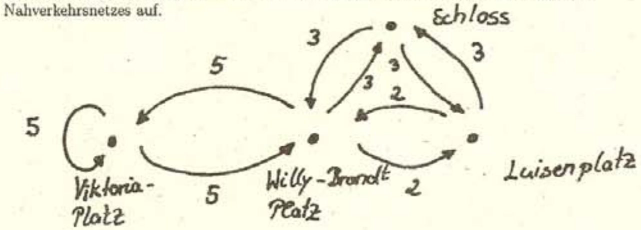
$$A^k := \underbrace{A \odot \cdots \odot A}_{k-mal},\ k = 1, 2 \ldots$$

und

$$A^k \odot e,\ k = 1, 2 \dots$$

Was fällt Ihnen auf? Betrachten Sie dazu die geraden und ungeraden Potenzen und halten Sie Ihr Ergebnis in einer Formel fest.

2. Für einen Testlauf fahren alle Züge zum Zeitpunkt 0 los. Was ist die Bedeutung von $A^k \odot e$?
3. Sellen Sie das Gleichungssystem für den nachstehenden Ausschnitt des Darmstädter Nahverkehrsnetzes auf.



4. Wir wollen nun einen einheitlichen Rhythmus für die Abfahrtszeitpunkte finden, $x(k+1)$ muss also aus $x(k)$ durch Addition einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ hervorgehen. In der Max-Plus-Algebra formuliert sich das mit der zum Streckenetz gehörigen Matrix als

$$A \odot x = \lambda \odot x.$$

Was für eine Art Problem ist das? Welche Bedeutung haben x und λ für den Fahrplan?

Aufgabe H2 Berechnung eines Fahrplans

Wir haben in der letzten Aufgabe die Berechnung des Fahrplanes auf ein Eigenwertproblem reduziert. Da man Matrizen über der Max-Plus-Algebra nicht substrahieren kann, ist es nicht mit den üblichen Methoden möglich, Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen. Wir benutzen einige Tatsachen ohne Beweis.
Eine Matrix A, die zu einem Streckennetz gehört, in dem man von jeder Haltestelle zu jeder anderen gelangen kann, ist im folgenden Sinne zyklisch:
Es gibt $K, d \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt $A^{k+d} = \lambda^d A^k$. Mit diesen Bezeichnungen ist λ der eindeutig bestimmte Eigenwert von A, d heißt *Periodizität* von A. Für die Beispiel-2×2-Matrix aus Aufgabe H1 gilt ab $K = 2$ die Gleichung $A^{k+2} = 14 \odot A^k$, also ist $d = 2$ und $\lambda = 7$. Daher ist 7 Eigenwert der Matrix.

1. Berechnen Sie den Eigenwert des Ausschnittes des Darmstädter Nahverkehrsnetzes aus Aufgabe H1.

   Den Eigenwert kann man im Graphen des Streckennetzes ablesen: Man sucht dazu eine Rundfahrt, d.h. eine Fahrt mit gleichem Start- und Endbahnhof, die keine Station mehrfach bedient, für die der Quotient aus Gesamtfahrtzeit und Anzahl der Haltestellen maximal ist. Solch eine Fahrt heißt *kritische Strecke*. Der größte gemeinsame Teiler der Anzahlen der Haltestellen aller kritischen Strecken ist die *Periodizität* d der entsprechenden Adjazenzmatrix A.

2. Konstruieren Sie ein Streckennetz mit Periodizität 3, Eigenwert 4 und mindestens 5 Haltestellen.

   Nun gilt es noch, einen Eigenvektor zu ermitteln. Ist λ ein Eigenwert von A, so betrachten wir $A_\lambda := \lambda^{-1} \odot A$. Es gibt in unserer Situation immer ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$A_\lambda^\oplus := \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_\lambda^k = A_\lambda \oplus \cdots \oplus A_\lambda^n.$$

In jeder Spalte von $A_\lambda^\oplus$, die zu einer Haltestelle auf einer kritischen Strecke gehört, steht ein Eigenvektor von A zum einzigen Eigenwert λ.
Im kleinen Beispiel aus Aufgabe H1 ist:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -\infty \end{pmatrix}, A_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_\lambda^3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$A_\lambda^\oplus = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beide Spaltenvektoren sind in diesem Fall Eigenvektoren.

3. Berechnen Sie einen Eigenvektor für den Abschnitt des Darmstädter Nachverkehrsnetzes aus Aufgabe H1.
4. Der Nahverkehr soll morgens um fünf Uhr aufgenommen werden. Erstellen Sie die Aushänge der Fahrzeiten für die vier Haltestellen aus dem Beispiel.
5. **Freizeitvergnügen**: Berechnen Sie den Fahrplan für das gesamte Darmstädter Nahverkehrsnetz.