Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
26.05.2006

Lineare Algebra II

6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr" oder „falsch" oder keines von beiden an. Geben Sie ferner eine kurze Begründung an.

		wahr	falsch
(i)	Der Matrizenring ist nullteilerfrei	☐	☐
(ii)	Jeder Endomorphismus hat einen Eigenwert.	☐	☐
(iii)	Zwei Automorphismen von Vektorräumen sind genau dann ähnlich, wenn sie äquivalent sind.	☐	☐

Aufgabe G2 Sei V ein $K-$Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat F^2+F den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1. Ist ein Eigenvektor von $F^2 + F$ zum Eigenwert -1 auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1?

Aufgabe G3 Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t = 0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0) = \alpha$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad y(0) = \alpha,\ \dot{y}(0) = \beta.$$

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}^+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Man macht daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{array}{rcll} \dot{y_0} &=& y_1, & y_0(0) = \alpha, \\ \dot{y_1} &=& -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1, & y_1(0) = \beta. \end{array}$$

Wie sieht die zugehörige Matrix A aus? Einer Diagonalisierung von A entspricht eine Entkopplung des obigen Systems.
Betrachten Sie nur den Fall $\mu^2 \geq \omega^2$ und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie im Falle einer Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren von A.
Geben Sie ferner eine Basis des Lösungsraumes von $\dot{y} = Ay$ an. Wie sieht die Lösung des obigen Systems aus?

Hinweise:
Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt folgendes:

1. $y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung $\neq 0$ von $\dot{y} = Ay$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
   Beweisen Sie diese Aussage.
2. Lösungen $y^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, y^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.
3. Mit $\dot{y} = \frac{d}{dt}y$ bzw. $\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}y$ wird die erste bzw. zweite Ableitung der Lösung y nach der Zeit bezeichnet.

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraumes, falls A diagonalisierbar ist.

Hausübungen

Abgabe am: 1.06.2006

Aufgabe H1 Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) := (-y + z, -3x - 2y + 3z, -2x - 2y + 3z)\,.$$

Ist F diagonalisierbar? Wie sehen im Falle der Diagonalisierbarkeit die Transformationsmatrizen aus?

Aufgabe H2 Es sei A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und zugehörigen algebraischen Vielfachheiten $s_1, \ldots, s_k$. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A) = \lambda_1^{s_1} \cdots \lambda_k^{s_k}$$

gilt.

Aufgabe H3 Sei K ein Körper, V ein $n-$dimensionaler $K-$Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$. Sei

$$\begin{aligned} B : \mathrm{End}(V) &\to \mathrm{End}(V) \\ X &\mapsto X \circ A \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für die charakterischen Polynome folgende Beziehung gilt: $\chi_B = (\chi_A)^n$.

Aufgabe H4 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte mit ihren Eigenvektoren und entscheiden Sie jeweils, ob sie diagonalisierbar sind. Geben Sie die Eigenräume an und im Falle der Diagonalisierbarkeit zusätzlich die Transformationsmatrizen.

$$\left(\pi^2\right), \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$