Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
18.05.2006

Lineare Algebra II

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Gibt es eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist diese gegebenenfalls eindeutig bestimmt? Geben Sie im Falle der Existenz eine solche an. (Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.)

Aufgabe G2 Zeigen Sie

(i) $U_1(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} ; z, w \in \mathbb{C} \text{ mit } |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$

Aufgabe G3 Sei F ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}-$Vektorraumes, für den gilt: Sind v und w Eigenvektoren von F, so ist $v + w$ ein Eigenvektor von F oder $v + w = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $F = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Aufgabe G4 Sei $A \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Machen Sie sich klar, dass unter dem Endomorphismus A des K^n die Unterräume

$$W_r := \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_r)$$

für $1 \leq r \leq n$ invariant sind.

Hausübungen

Abgabe am: 26.05.2006 bzw. 1.06.2006

Aufgabe H1 Zeigen Sie: Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit d_λ stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Aufgabe H2 Seien A, B Matrizen aus $\mathbb{R}^{5\times 5}$ und

$$\chi_A(t) = -2t^5 + 2t^3 + 13t^2 + 7$$
$$\chi_B(t) = t^5 + 3t^4 + t^3 - 10t^2 - 2t$$

ihre charakteristischen Polynome. Bestimmen Sie die Dimension des Kerns des durch die Matrix $A \cdot B$ beschriebenen Endomorphismus von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe H3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass $\chi_F(0) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

Aufgabe H4 Wiederholung

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der Polynomdivision (vgl. LA I, §5) die eindeutig bestimmten Polynome $s, r \in \mathbb{K}[t]$ mit $p = s \cdot q + r$ und $\deg(r) < \deg(q)$. (r ist dabei der Rest, ist $r = 0$, so sagt man, p ist durch q teilbar.)
- In $\mathbb{R}[t]$: $p(t) = t^4 - t^2 - 2t - 1$, $q(t) = t^2 + t - 1$.
- In $\mathbb{F}_5[t]$: $p(t) = t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 4t^2 + t + 4$, $q(t) = 2t^3 + t^2 + 3t + 4$.

(ii) Zeigen Sie: Ist a eine Nullstelle des Polynoms $f \in \mathbb{K}[t]$, so ist f durch $t - a$ teilbar.

(iii) Finden Sie mit Hilfe von Teil (ii) eine Zerlegung der folgenden Polynome in Faktoren vom Grad kleiner als drei:
- In $\mathbb{Q}[t]$: $p(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$
- In $\mathbb{F}_5[t]$: $q(t) = t^3 + 2t^2 + 4t + 3$