Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
11.05.2006

Lineare Algebra II

4. Übung

Die Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra“ findet am Freitag, 21.07.2006, ab 16:15h in den Räumen S3 11/08 und S3 11/006 statt.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr“ oder „falsch“ oder keines von beiden an.

		wahr	falsch
(i)	Für $\lambda \in K$ und natürliche Zahlen μ, n mit $1 \leq \mu \leq n$ gibt es stets eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit algebraischer Vielfachheit $\mu(P_A; \lambda) = \mu$ und $\dim \operatorname{Eig}(A; \lambda) = 1$?	□	□
(ii)	Sei K ein beliebiger Körper und $0 \neq a \in K$. Die Dreiecksmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar.	□	□
(iii)	Sei K ein beliebiger Körper, $0 \neq a \in K$ und $A \in K^{2\times 2}$ wie in (ii). Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.	□	□

Aufgabe G2 Wir betrachten in dieser Aufgabe die durch $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ beschriebenen Abbildungen. Ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $v = (\cos\gamma, \sin\gamma)^T$ mit $1 \leq \gamma < 2\pi$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt genau ein w_1 in $\mathbb{R}^2$ mit $Q_1 = (v, w_1) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und genau ein $w_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $Q_2 = (v, w_2) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Durch $D_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Q_1 x$ wird die Drehung um den Ursprung um den Winkel γ beschrieben, d.h. $\measuredangle(x, D_\gamma(x)) = \gamma$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Greifen Sie dabei auf die Definition des Winkels mit Hilfe des Skalarproduktes zurück.

(iii) Die Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Q_2 x$ beschreibt die Spiegelung an einer Gerade durch den Ursprung. An welcher?

(iv) Berechnen Sie anhand des charakteristischen Polynoms, für welche $\gamma \in [0, 2\pi]$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte hat. Geben Sie eine geometrische Interpretation der durch diese Matrix beschriebenen Abbildung an und erklären Sie damit das Ergebnis.

Die Spiegelung an einer Gerade g durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ ist die (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung, die diese Gerade fest lässt und jedes $v \in g^\perp$ auf sein Negatives abbildet. (Vergleiche Verallgemeinerung auf Übungsblatt 2) Es ist $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ und $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Aufgabe G3 Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix über einem Körper K. Zeigen Sie: $A = 0 \Longleftrightarrow$ A ist nilpotent und diagonalisierbar.

Hausübungen

Abgabe am: 18.05.2006

Aufgabe H1 Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung $A^2 = E_2$ in $K^{2\times 2}$ genau von der Gestalt sind:

$$A = E_2, A = -E_2 \quad \text{oder} \quad A = SDS^{-1} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } S \in \mathrm{GL}(2; K).$$

Aufgabe H3 Sei SO_3 die Gruppe der Drehungen um eine beliebige Achse im $\mathbb{R}^3$.

(i) Warum ist SO_3 eine Gruppe?

(ii) Zeigen Sie: $\mathrm{SO}_3 \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

(iii) Zeigen Sie: Eine Drehung $D \in \mathrm{SO}_3$ hat den Eigenwert 1.

(iv) Zeigen Sie: Zu $D \in \mathrm{SO}_3$ gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ und einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$, so dass gilt

$$[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung hat die Zahl α?

(v) Beweisen Sie den Satz vom Fussball: Es existiert ein Punkt auf dem Fussball, welcher sich zu Beginn der zweiten Halbzeit an derselben Stelle im umgebenden Raum befindet wie am Anfang des Spieles. Wir gehen dabei davon aus, dass der Anstoßpunkt am Beginn der beiden Halbzeiten derselbe ist.

(vi) Sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in [0, 2\pi]$. Geben Sie die Drehmatrix der Drehung um die Achse $\mathbb{R}x$ mit dem Winkel α an.

Aufgabe H4 Sei V ein unitärer Raum und $x, y \in V$. Zeigen Sie:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2.$$