Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
4./5. Mai 2006

Lineare Algebra II

3. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr“ oder „falsch“ oder keines von beiden an.

		wahr	falsch
(i)	Eine nilpotente Matrix $M \in K^{n\times n}$ hat Null als einzigen Eigenwert.	$\square$	$\square$
(ii)	Für den durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ beschriebenen Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ gilt: $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.	$\square$	$\square$
(iii)	Sei V ein endlichdim. $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und U ein φ-invarianter Unterraum, d.h. $\varphi(U) \subset U$. Dann enthält U einen Eigenvektor von φ.	$\square$	$\square$

Aufgabe G2 Betrachten Sie die „Tribonacci-Zahlen“ τ_i definiert durch $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = 1$ und die Vorschrift $\tau_{n+1} = 2\tau_{n-1} - 4\tau_{n-2}$. Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für τ_n.

Aufgabe G3 Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe G4 Bestimmen Sie Eigenwerte und Basen der Eigenräume der folgenden Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a-1 & 1 \\ 2 & -1 & 3+a \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Kann man von Aussagen über M auf solche über $M + aE$ schließen?

Aufgabe G5 Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, deren charakteristisches Polynom (über $\mathbb{R}$) nicht in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie: Es gibt einen zweidimensionalen φ-invarianten Unterraum (vgl. G1 (iii)).

Hausübungen

Abgabe am: 11./12.05.2006

Aufgabe H1

a) Zeigen Sie: Ist $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{Q}[t]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten (d.h. $a_i \in \mathbb{Z}$) und $a \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle von p, so gilt $a|a_0$.

b) Zeigen Sie: Ein Polynom $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{Q}[t]$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $a_n = \pm 1$ hat keine rationalen Nullstellen, die nicht ganzzahlig sind.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ mit ihren Vielfachheiten.

d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2

a) Ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) := (z - 2y, 2x - 2, 2y - z)$$

diagonalisierbar?

b) Ist der durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

gegebene Endomorphismus des $\mathbb{C}^3$ diagonalisierbar?

Aufgabe H3

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[X]$ n-ten Grades mit Leitkoeffizient $(-1)^n$ als charakteristisches Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ auftritt.

Aufgabe H4 Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt idempotent, wenn $A^2 = A$ gilt. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom einer idempotenten Matrix A von der Form

$$(1 - \lambda)^{\mathrm{rang}(A)} \lambda^{n-\mathrm{rang}(A)}$$

ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $A : V \to V$, wobei V ein K-Vektorraum ist, gilt: $V = \mathrm{im}\, A \oplus \ker A$ und folgern Sie daraus, dass A ähnlich zur Matrix $\begin{pmatrix} I_{\mathrm{rang} A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist.