Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
28./29.04.2006

Lineare Algebra II

2. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1

a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und für ein $0 \neq v \in V$ gelte $\varphi(-v) = \lambda v$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

[ ] λ ist Eigenwert von φ [ ] $-\lambda$ ist Eigenwert von φ.

[ ] v ist Eigenvektor von φ [ ] $-v$ ist Eigenvektor von φ.

b) Die Gruppe $SU_n\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe von

[ ] $\mathbb{C}^{n\times n}$ [ ] $SL_n\mathbb{C}$ [ ] S_n [ ] $U_n\mathbb{C}$

c) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ orthogonal bezüglich euklidischem Skalarprodukt und B eine Basis. Dann gilt $[\varphi]_B \in O_n\mathbb{R}$:
[ ] immer [ ] falls B ONB ist [ ] nur wenn B ONB ist .

Aufgabe G2

a) Sei $(V, \langle ., . \rangle_1)$ ein euklidischer Raum und $\varphi : V \longrightarrow V$ eine orthogonale Abbildung. Welche Eigenwerte kann φ haben?

b) Sei $(W, \langle ., . \rangle_2)$ ein unitärer Raum und $\psi : W \longrightarrow W$ eine unitäre Abbildung. Welche Eigenwerte kann φ haben?

Aufgabe G3

a) Sie $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p (d.h. $p^*(z) = 0$). Zeigen Sie, daß dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

b) Zeigen Sie, daß für eine unitäre Matrix $A \in U_n\mathbb{C}$ gilt: $|\det A| = 1$.

c) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit reellen Einträgen und λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Zeigen Sie, daß dann auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe G4

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume für die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}$$

b) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}$ an, die keinen Eigenwert hat.

Aufgabe G5 Die lineare Abbildung $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ habe den Eigenwert 1 zum Eigenvektor v_1 und den Eigenwert -1 zum Eigenvektor v_2; die lineare Abbildung $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ habe den Eigenwert 1 zum Eigenvektor v_3 und den Eigenwert -1 zum Eigenvektor v_4 mit:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kann φ_i orthogonal bzgl. euklidischem Skalarprodukt sein? Geben Sie ggf. die Matrix einer orthogonalen Abbildung φ_i bezüglich einer von Ihnen gewählten Basis an.

Hausübungen

Abgabe am 04./05. Mai 2006

Aufgabe H1 Für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bekannt: $(1,2,4)^T$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2, $(0,-1,1)^T$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $(2,3,8)^T$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0. Berechnen Sie die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe H2 Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ist $v \in V$ ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$), so wird durch

$$s_v : V \to V, \quad w \mapsto w - 2\langle w, v\rangle v$$

eine Abbildung definiert, die *orthogonale Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene* heißt. Im Folgenden wollen wir dies erläutern.

a) Zeigen Sie, daß s_v eine lineare Abbildung ist, das Skalarprodukt erhält und daß $s_v \circ s_v = \mathrm{id}_V$ gilt. Folgere, dass s_v orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathrm{span}\,(v)$ gilt: $s_v(w) = -w$ und für alle $w \in v^\perp$ gilt: $s_v(w) = w$.

Aufgabe H3 Sei $l^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum_{i=1}^\infty |x(i)|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen. Wir schreiben im folgenden $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$.

a) Zeigen Sie: l^2 wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation zu einem komplexen Vektorraum.

b) Zeigen Sie: durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i} \qquad \text{wird eine Abbildung } l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$$

definiert, die l^2 zu einem unitären Raum macht.

c) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : l_2 \to l_2$ an, die $\langle ., . \rangle$ erhält, aber nicht bijektiv ist.

d) Sei U die Teilmenge von l_2, deren Elemente nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben, d.h.

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2 | \exists N_0 : x_i = 0 \,\forall i > N_0\}.$$

Zeigen Sie, daß U ein linearer Teilraum von V ist, für den $(U^\perp)^\perp \neq U$ gilt.

Aufgabe H4 Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismen von V. Zeigen Sie, daß jeder Eigenwert von $\varphi \circ \psi$ auch Eigenwert von $\psi \circ \varphi$ ist.