Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
6.07.2006

Lineare Algebra II

12. Übung

Bitte melden Sie sich bis zum **6./7.07.2006** in der Übung bei Ihrem Übungsleiter zur Klausur an.
Mathematik *Diplom-Studierende*, die an der Klausur zur Linearen Algebra II teilnehmen möchten, schreiben im Raum *S311/006*. *Alle anderen* schreiben im Raum *S311/08*.
Beachten Sie auch die Informationen zur Klausur, sowie die aktuellen Informationen auf der Homepage **http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/lehrmaterial/SS2006/LAII/**

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr“ oder „falsch“ oder keines von beiden an.

		wahr	falsch
(i)	Jede komplexe quadratische Matrix ist ähnlich zu einer Matrix in Jordannormalform.	□	□
(ii)	Zwei komplexe $n \times n$ Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleichen Eigenwerte haben.	□	□
(iii)	Zwei komplexe $n \times n$ Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn es eine Matrix in Jordannormalform gibt, zu der beide ähnlich sind.	□	□

Aufgabe G2

(i) Welche der folgenden Matrizen sind ein Jordanblock?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Welche der folgenden Matrizen sind in Jordannormalform?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3 Erinnern Sie sich an das Lemma in §8 1)b der Vorlesung: Ein Jordanblock $J_{m,\lambda}$ mit $m > 1$ ist nicht diagonalisierbar. Sein Eigenraum zum Eigenwert λ ist eindimensional. Rekonstruieren Sie dessen Beweis ohne dabei den Beweis abzuschreiben.

Aufgabe G4

(i) Zeigen Sie: Das Minimalpolynom eines Jordanblocks $J_{m,\lambda}$ ist $\mu_J = (t-\lambda)^m$. (vgl. Lemma in § 8 1)c der Vorlesung)

(ii) Wie sieht das Minimalpolynom einer Matrix A in Jordanscher Normalform aus, die aus Blöcken $J_{m_i,\lambda}$ besteht?

(iii) Wie sieht das Minimalpolynom einer Matrix A aus, die aus Jordanblöcken zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ besteht?

Aufgabe G5 Zeigen Sie, dass es zu jedem $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, für das $A = 0$ oder $A^2 \neq 0$ gilt, ein $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gibt, sodass $B^2 = A$.

Hausübungen

Abgabe am: 13.07.2006

Aufgabe H1

(i) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordannormalform, die -1 als einzigen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 hat.

(ii) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordannormalform, die die folgenden Eigenwerte hat:
1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1,
2 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 3,
5 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2.

(iii) Finden Sie Matrizen in Jordannormalform, die ähnlich zu den folgenden Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume der Matrizen aus (iii).

Aufgabe H2

1. Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$
2. Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Die Jordannormalform von A lässt sich schreiben als $A' = \lambda \operatorname{id} + N$, wobei λ der Eigenwert von A und N eine nilpotente Matrix ist.

Aufgabe H3 Berechnen Sie für die folgende Matrix das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, Eigenräume und diagonalisieren bzw. trigonalisieren (soweit möglich) Sie sie (einschließlich der Angabe der Transformationsmatrizen).

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Zusatzübung

Aufgabe H4 Sei $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ der Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$, der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.
Konstruieren Sie bezüglich des kanonischen Skalarproduktes von $\mathbb{C}^4$ eine Orthonormalbasis von U und bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U in $\mathbb{C}^4$.
Hinweis:

- $i^2 = -1$
- Für zwei Vektoren $z, w \in \mathbb{C}^n$ ist das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ definiert durch: $\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$.