Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
29.06.2006

Lineare Algebra II

11. Übung

Falls Sie an den **Klausuren zur Linearen Algebra am 21.07.2006** von Prof. Joswig teilnehmen möchten, melden Sie sich bitte bis zum **06./07.07.2006** bei Ihrem Übungsleiter an.
Nähere **Informationen** zur Anmeldung, Zulassung und Raumverteilung finden Sie unter:
http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/lehrmaterial/SS2006/LAII/

Studierende, die nur einen Teilnahmenachweis benötigen, teilen dies bitte Ihrem Übungsleiter mit.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zu einem $F \in \mathrm{End}(V)$ wird ein *adjungierter Endomorphismus* F^{ad} erklärt, der durch die Bedingung

$$\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, F^{ad}(w)\right\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V$$

charakterisiert ist. Das erklärt die folgende **Definition**:
Ein Endomorphismus F eines euklidischen bzw. unitären Vektorraumes V heißt *selbstadjungiert*, wenn

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

In Matrizen übersetzt ist Ihnen diese Beziehung bereits aus der Vorlesung (§7, 1(b)) bekannt. Zeigen Sie:
Sei F ein Endomorphismus von V und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt:
F selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $[F]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch bzw. hermitesch.

Aufgabe G2 **Definition:** Ein Endomorphismus F eines endlich dimensionalen unitären Vektorraumes V heißt *normal*, wenn

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F.$$

Sie kennen diesen Begriff bereits aus der Vorlesung (§7, 1(e)) für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
A heißt *normal*, wenn $A \cdot \bar{A}^T = \bar{A}^T \cdot A$ gilt.
Zeigen Sie:
Für einen Endomorphismus F eines $n-$dimensionalen unitären $\mathbb{C}-$Vektorraumes V sind folgende Bedingungen gleichwertig:

(i) F ist normal

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von F.

Ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist also genau dann normal, wenn es ein $S \in U_n\mathbb{C}$ gibt, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Vgl. Vorlesung §7, 3(a).
Hinweis: Für $F \in \mathrm{End}(V)$ normal gilt:

- $V_\lambda^F = V_{\bar{\lambda}}^{F^{ad}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. (V_λ^F bezeichne den Eigenraum von F bezüglich des Eigenwertes λ.)
- $\mathrm{Ker}\, F^{ad} = \mathrm{Ker}\, F$.

Aufgabe G3 Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.

Aufgabe G4 Seien $N, N' \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nilpotente Matrizen. Zeigen Sie:

(i) N nilpotent $\Longrightarrow N^n = 0$.

(ii) Gilt $NN' = N'N$, so ist auch NN' und $N + N'$ nilpotent.

(iii) Gilt allgemein, dass ein Produkt und die Summe nilpotenter Matrizen wieder nilpotent sind?

Hausübungen

Abgabe am: 6.07.2006

Aufgabe H1 Ein Endomorphismus F eines endlich dimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes V heißt *anti-selbstadjungiert*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle F(v), w\rangle = -\langle v, F(w)\rangle .$$

Es sei V ein $n-$dimensionaler euklidischer Vektorraum und F ein Endomorphismus von V.

(i) Zeigen Sie, dass F genau dann anti-selbstadjungiert ist, wenn $\langle F(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

(ii) Ist F anti-selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von F, so folgt $\lambda = 0$.

(iii) $\mathcal{B}$ sei eine Orthonormalbasis von V und F ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V. Dann gilt:
F ist anti-selbstadjungiert $\Longleftrightarrow [F]_\mathcal{B}$ ist schiefsymmetrisch.

Aufgabe H2 Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in U_3\mathbb{C}$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe H3 Berechnen Sie für die symmetrische Bilinearform s des $\mathbb{R}^3$ mit

$$[[s]]_\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$, sodass $[[s]]_\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge aus $\{-1, 0, 1\}$ sind. Hierbei bezeichne $\mathcal{K}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H4 Zeigen Sie den **Trigonalisierungssatz**:
Für einen Endomorphismus F eines n-dimensionalen $K-$Vektorraumes sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) F ist trigonalisierbar.

(ii) Das charakteristische Polynom χ_F zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$\chi_F = \pm(t-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(t-\lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K.$$

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra folgt das
Korollar: Jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraumes ist trigonalisierbar.

Hinweis: Zeigen Sie die Richtung (i)⇒(ii) durch Induktion über $n = \dim V$. Betrachten Sie $V = V_1 \oplus W$ mit $V_1 := \mathrm{lin}(v_1)$ und $W := \mathrm{lin}(w_2,\dots,w_n)$ und

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{B} = (v_1, w_2, \dots, w_n)$ eine Basis von V ist und v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Durch

$$H(w_j) = a_{1j}v_1 \quad \text{und} \quad G(w_j) = a_{2j}w_2 + \dots + a_{nj}w_n$$

seien lineare Abbildungen $H: W \to V_1$ und $G: W \to W$ erklärt mit

$$F(w) = H(w) + G(w) \qquad \text{für alle } w \in W.$$