Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Christina Collet
Birgit Petri

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
20.04.2006

Lineare Algebra II

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie dabei entweder „wahr“ oder „falsch“ oder keines von beiden an.

		wahr	falsch
(i)	$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$ ist Element der speziellen orthogonalen Gruppe SO(3).	□	□
(ii)	Der Vektor $v = \frac{1}{156}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ ist normiert.	□	□
(iii)	Die Spur obiger Matrix A ist -15. (Zur Definition der Spur einer Matrix siehe Aufgabe 2).	□	□

Aufgabe G2 Für quadratische Matrizen $M = (m_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert man die *Spur* durch $\operatorname{tr} M := \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$. Zeigen Sie, dass durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^T A)$ der $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times n}$ zu einem euklidischen Raum wird.

Aufgabe G3 Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}-$Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

(i) Zeigen Sie, dass F_α eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\langle w, z\rangle = \operatorname{Re}(w\bar{z})$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definiert. Erkennen Sie es wieder?

(iii) Für welche α ist F_α bezüglich dieses Skalarproduktes eine orthogonale Abbildung? Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch!

(iv) Wie sieht die darstellende Matrix $[F_\alpha]_{(1,i)}^{(1,i)}$ aus?

Aufgabe G4 Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $u, v \in V$.

1. Zeigen Sie: $\|u\| = \|v\|$ genau dann, wenn $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.
2. Leiten Sie daraus eine Bedingung ab, wann ein Parallelogramm ein Rhombus ist.
3. Wie folgt daraus der Satz von Thales?
4. Zeigen Sie:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 .$$

Aufgabe G5 Wiederholung
Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum.

(i) Zeigen Sie für $x, y \in V$ den Satz des Pythagoras:
$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$
Es sei nun U ein Unterraum von V mit Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_k\}$.
Wir betrachten einen fest gewählten Vektor $v \in V$ und setzten $w = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle \, u_i \in U$.

(ii) Zeigen Sie: $v - w \in U^\perp$

(iii) Zeigen Sie: Für jedes $u \in U$ mit $u \neq w$ ist $\|v-u\|^2 > \|v-w\|^2$.

(iv) Man nennt w das Lot von v auf U. Warum ist w unabhängig von der oben gewählten Orthonormalbasis in U?

Hausübungen

Abgabe am: 27.04.2006

Aufgabe H1 Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Beweisen Sie die Ihnen aus der Vorlesung Lineare Algebra I bereits bekannten Äquivalenzen:

(i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} : y = \alpha x$.

(ii) $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x$ und y sind linear abhängig.

Aufgabe H2 Sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Abbildungen $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ sind Bilinearformen, welche Skalarprodukte?

(i) Sei $V = K[x]$, $a \in K$ fest gewählt und $\langle p, q \rangle := (p \cdot q)(a)$.

(ii) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben als $\varphi(x, y, z) := xy + z^2 + 3y$, $V = \mathbb{R}^3$ und
$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{2} \left(\varphi(v+w) - \varphi(v) - \varphi(w) \right) \qquad \text{für } v, w \in \mathbb{R}^3$$

(iii) $V = \mathbb{R}^n$ und
$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := x_1 \cdot y_n .$$

Aufgabe H3 Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $(v_1, \dots, v_r)$ eine orthonormale Familie in V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $(v_1, \dots, v_r)$ ist eine Basis von V.

(ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$.

(iii) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.

(iv) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \langle w, w_i \rangle$.

(v) Für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Aufgabe H4 Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraumes des $\mathbb{R}^5$:
$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$