Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 05.07.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

6. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

(a) Da $X_1, \ldots, X_n$ iid $B(1, \theta)$-verteilt sind, gilt

$$P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_1) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = L_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

Also folgt

$$1 = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_1) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} L_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

(b) Aufgrund der Erwartungstreue ist

$$\theta = \mathrm{E}_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)).$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot L_\theta(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1, \ldots, X_n))\right) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1, \ldots, x_n)) \cdot L_\theta(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1, \ldots, x_n)) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1, \ldots, x_n)}{L_\theta(x_1, \ldots, x_n)}$$

ist, folgt

$$\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1, \ldots, X_n))\right) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

Nach (a) gilt

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} L_\theta(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

also erhält man durch Differenzieren nach θ

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

Aufgabe 2 Differenzieren nach θ ergibt

$$1 = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T_n(x_1,\ldots,x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1,\ldots,x_n).$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1,\ldots,x_n)}{L_\theta(x_1,\ldots,x_n)},$$

folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T_n(x_1,\ldots,x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(x_1,\ldots,x_n) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T_n(x_1,\ldots,x_n) \cdot L_\theta(x_1,\ldots,x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1,\ldots,x_n)) \\
&= \mathrm{E}_\theta \left(T_n(X_1,\ldots,X_n) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\mathrm{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right) = 0$$

nach Aufgabe 1. Somit ergibt sich

$$\mathrm{E}_\theta \left((T_n(X_1,\ldots,X_n) - \tau(\theta)) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right) = 1.$$

Anwendung von Satz 3 und die Erwartungstreue von T_n ergeben

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\mathrm{E}_\theta \left((T_n(X_1,\ldots,X_n) - \tau(\theta)) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right) \right)^2 \\
&\leq \mathrm{Var}_\theta \left(T_n(X_1,\ldots,X_n) \right) \cdot \mathrm{E}_\theta \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right|^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Es ist

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta} - \frac{1-x_i}{1-\theta} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i-\theta}{\theta(1-\theta)}.$$

Also gilt

$$\mathrm{E}_\theta \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L_\theta(X_1,\ldots,X_n)) \right|^2 = \mathrm{E}_\theta \left| \sum_{i=1}^n \frac{X_i-\theta}{\theta(1-\theta)} \right|^2 = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} \mathrm{Var}_\theta \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

Weiterhin ist

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n^*(X_1,\ldots,X_n)) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}_\theta \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$