Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 21.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

5. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Starkes und schwaches Gesetz der großen Zahlen)

- Starkes Gesetz der großen Zahlen: Hier gilt $P(A) = 1$ für die Menge

$$\begin{aligned} A &= \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(\omega) = \mathrm{E}(X)\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N_0 \;\; |\overline{X}_n(\omega) - \mathrm{E}(X)| \leq \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

  Also:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N_0 \;\; |\overline{X}_n(\omega) - \mathrm{E}(X)| \leq \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

- Schwaches Gesetz der großen Zahlen: Hier gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n^{(\varepsilon)}\right) = 1$$

  für die Mengen

$$A_n^{(\varepsilon)} = \left\{\omega \in \Omega : |\overline{X}_n(\omega) - \mathrm{E}(X)| \leq \varepsilon\right\}.$$

  Also:

$$\forall\varepsilon' > 0 \;\; \exists N_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N_0 \;\; P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\overline{X}_n(\omega) - \mathrm{E}(X)| \leq \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \varepsilon'.$$

Insbesondere ist das starke Gesetz der großen Zahlen eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß der Grenzwert einer Folge von Zufallsvariablen gleich einer bestimmten Zahl ist, während das schwache Gesetz der großen Zahlen eine Aussage über die Grenzwerte verschiedener Folgen von Wahrscheinlichkeiten ist.

Aufgabe 2 (Beispiel einer Folge, die das starke Gesetz der großen Zahlen aber nicht den zentralen Grenzwertsatz erfüllt)

1. Es ist $X_k = (-1)^{k-1} X_1$ für $k \in \mathbb{N}$ und somit folgt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \begin{cases} X_1 & \text{für ungerades} \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Daher gilt für jedes $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|X_1(\omega)|}{n} = 0$$

   und somit ist

$$P\left(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} = 0\right) = 1.$$

2. Wähle $x = 0$. Dann ist
$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot S_n \leq 0\right) = \begin{cases} P(X_1 \leq 0) = \frac{1}{2} & \text{für ungerades} \quad n \in \mathbb{N}, \\ P(\Omega) = 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Also existiert
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot S_n \leq 0\right)$$
nicht. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind nicht unabhängig; sie sind sogar linear abhängig.

Aufgabe 3 (Beispiel einer Folge, die zwar den zentralen Grenzwertsatz, aber nicht das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt)

1. Nach Folgerung 1, Seite 82 (Lehn/Wegmann) ist
$$\sum_{k=1}^{n} Y_k \sim N(0, \sum_{k=1}^{n}(2k-1)) = N(0, n^2) \quad \text{(Hinweis)}.$$
Somit ist $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ standard-normalverteilt. Wegen $\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 = n^2$ und $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$ gilt
$$P\left(\frac{Y_1 + \ldots + Y_n - (\mu_1 + \ldots + \mu_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}} \leq x\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x\right) = \Phi(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt wegen $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \sim N(0,1)$
$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \varepsilon\right) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$$
und somit
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon) - 1 < 1, \quad \text{da } \Phi(\varepsilon) < 1.$$
Die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ sind nicht identisch verteilt.

Zusatz. (Weierstraßsches Approximationstheorem)
Siehe File 'ws.jpg'. Betrachtet man $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängig und identisch $B(1,p)$-verteilt, dann ist $S_n \sim B(n,p)$ und es gilt
$$P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) = \sum_{\{k:|(k/n)-p|\geq\varepsilon\}} C_n^k p^k q^{n-k}$$
mit $q = 1 - p$, $C_n^k = \binom{n}{k}$. Nach der Tschebyscheff-Ungleichung gilt aber auch
$$P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$
Da $pq \leq 1/4$ ist, folgt somit
$$\sum_{\{k:|(k/n)-p|\geq\varepsilon\}} C_n^k p^k q^{n-k} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$
und das ist Gleichung (5) in 'ws.jpg', für die auch die Bezeichnung "schwaches Gesetz der großen Zahlen für $B(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen" verwendet wird.