**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 21.06.2006

# Einführung in die Mathematische Statistik

## 5. Tutorium

### Gesetze der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

Im folgenden werden die Voraussetzungen und die Aussagen der genannten Sätze (2.78 bis 2.82) untersucht und anhand von Beispielen betrachtet.

**Aufgabe 1 (Starkes und schwaches Gesetz der großen Zahlen)**
Zunächst soll der Unterschied zwischen dem starken und dem schwachen Gesetz der großen Zahlen herausgearbeitet werden:
Diese beiden Gesetze treffen Aussagen über die Konvergenz von $\overline{X}_{(n)}$ gegen $\mathrm{E}(X)$ für eine Folge von unabhängigen, identisch wie $X$ verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$. Notieren Sie die Ereignisse, auf welche sich die entsprechenden Aussagen beziehen, in ausführlicher Schreibweise und machen Sie sich hieran den Unterschied zwischen den beiden Gesetzen klar.

**Bemerkung.** Es läßt sich zeigen, daß aus der Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen für eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ bereits die Gültigkeit des schwachen Gesetzes der großen Zahlen für diese Folge von Zufallsvariable folgt.

**Aufgabe 2 (Beispiel einer Folge, die das starke Gesetz der großen Zahlen aber nicht den zentralen Grenzwertsatz erfüllt)**
Gegeben sei eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen mit:

$$X_1 \text{ ist } N(0,1)\text{-verteilt und } X_k = -X_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

1. Zeigen Sie, daß diese Folge das starke Gesetz der großen Zahlen erfüllt, d.h., es gilt

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right) = 1.$$

2. Zeigen Sie nun, daß der zentrale Grenzwertsatz für diese Folge von Zufallsvariablen nicht erfüllt ist, d.h., es gilt <u>nicht</u>

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \leq x\right) = \Phi(x).$$

   Welche Voraussetzung des zentralen Grenzwertsatzes ist hier verletzt?

**Aufgabe 3 (Beispiel einer Folge, die zwar den zentralen Grenzwertsatz, aber nicht das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt)**
Gegeben sei eine Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit:

$$Y_k \text{ ist } N(0, \sigma_k^2)\text{-verteilt, wobei } \sigma_k^2 = 2k - 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

1. Zeigen Sie, daß diese Folge den zentralen Grenzwertsatz erfüllt.
   Hinweis: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
2. Zeigen Sie nun, daß das schwache Gesetz der großen Zahlen für diese Folge von Zufallsvariablen nicht erfüllt ist. Welche Voraussetzung ist hier verletzt?

**Zusatz:** Mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen läßt sich das Weierstraßsche Approximationstheorem in eleganter Weise beweisen.

**Satz. (Weierstraßsches Approximationstheorem)**
*Sei $f \in C([0,1])$. Weiterhin sei $B_n \in C([0,1])$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch*

$$B_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \quad p \in [0,1]$$

*(n-tes Bernsteinpolynom). Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{p \in [0,1]} |f(p) - B_n(p)| = 0.$$

Beweisen Sie das Weierstraßsche Approximationstheorem mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $f$ und dem schwachen Gesetz der großen Zahlen für $B(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen.