Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 07.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

4./7. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1
Die Zufallsvariable $|X|^q$ ist nichtnegativ. Somit gilt nach Lehn/Wegmann Satz 2.42, Folgerungen 1 und 2

$$\mathrm{E}\,|X|^q = \int_0^\infty P(|X|^q \geq x)\,dx.$$

Weiterhin ist

$$\int_0^\infty P(|X|^q \geq x)\,dx \geq \int_0^{\alpha^q} P(|X|^q \geq x)\,dx \geq \alpha^q \cdot P(|X|^q \geq \alpha^q).$$

Somit folgt

$$P(|X| \geq \alpha) = P(|X|^q \geq \alpha^q) \leq \frac{1}{\alpha^q}\int_0^\infty P(|X|^q \geq x)\,dx = \frac{1}{\alpha^q}\,\mathrm{E}\,|X|^q.$$

Aufgabe 2
Wende Satz 1 auf $X = Y - \mathrm{E}(Y)$ an. Hier ist $\mathrm{E}\,|X|^2 = \mathrm{Var}(Y) = n/4 = 250$. Also erhält man

$$P(\{|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq 50\}) \leq \frac{250}{50^2} = 0.1.$$

Aufgabe 3 (nicht im Tutorium für 1. Semester)
Taylorentwicklung in $r = 0$:

$$L(r) = L(0) + L'(0)r + \frac{1}{2}L''(\xi)r^2, \qquad r \geq 0$$

mit $\xi \in]0, r[$. Für $L(r) = n\ln(1 - p + p\exp(r))$ gilt

$$\begin{aligned}
&L(0) = 0,\\
&L'(r) = n\frac{p\exp(r)}{1-p+p\exp(r)}, \qquad L'(0) = n\cdot p,\\
&L''(r) = n\frac{p\exp(r)}{1-p+p\exp(r)} \cdot \left(1 - \frac{p\exp(r)}{1-p+p\exp(r)}\right).
\end{aligned}$$

Nun gilt es noch $L''(r)$ nach oben abzuschätzen. Es gilt

$$0 \leq \frac{p\exp(r)}{1-p+p\exp(r)} \leq 1.$$

Da ebenso für $c \in [0,1]$ die Ungleichung $|c(1-c)| \leq 1/4$ gilt, folgt somit

$$|L''(r)| \leq \frac{n}{4}.$$

Also ergibt sich aus der Taylorentwicklung

$$0 \leq L(r) \leq npr + \frac{nr^2}{8}$$

und die Behauptung folgt.

Aufgabe 4 (Aufgabe 3 im Tutorium für 1. Semester)
(1) Es ist $\mathrm{E}(X) = np$ und insbesondere $X \geq 0$. Mit Satz 1 für $q = 1$ gilt

$$P(X - \mathrm{E}(X) \geq \alpha) = P\left(\exp(rX) \geq \exp(r(\alpha + np))\right) \leq \exp(-r(\alpha + np)) \cdot \mathrm{E}\exp(rX).$$

Da X sich darstellen läßt als

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

mit Z_i, $i = 1, \ldots, n$, iid $B(1,p)$-verteilt, ist

$$\mathrm{E}\exp(rX) = (1 - p + p\exp(r))^n.$$

Anwendung von Lemma 1 ergibt folglich

$$(\star) \quad P(X - \mathrm{E}(X) \geq \alpha) \leq \exp(-r(\alpha + np)) \cdot \exp(rnp + nr^2/8) = \exp(nr^2/8 - r\alpha).$$

(2) Nun ist $f(r) = nr^2/8 - r\alpha$ noch bezüglich r zu minimieren. Es gilt

$$f'(r) = nr/4 - \alpha, \qquad f''(r) = n/4 > 0.$$

Also ist $r^* = 4\alpha/n$ die gesuchte Minimalstelle. Einsetzen von r^* in $(\star)$ ergibt

$$(\star\star) \qquad P(X - \mathrm{E}(X) \geq \alpha) \leq \exp(-2 \cdot \alpha^2/n).$$

Noch bleibt noch $P(X - \mathrm{E}(X) \leq -\alpha)$ abzuschätzen. Nun gilt aber für eine $B(1,p)$-verteilte Zufallsvariable X und eine $B(n, 1-p)$-verteilte Zufallsvariable Y die Beziehung

$$P(X = k) = P(Y = n - k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(X - \mathrm{E}(X) \leq -\alpha) &= P(X \leq np - \alpha) = P(Y \geq n - np + \alpha) \\ &= P(Y - n(1-p) \geq \alpha) = P(Y - \mathrm{E}(Y) \geq \alpha). \end{aligned}$$

Da $(\star\star)$ unabhängig von p ist folgt somit

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha) \leq 2\exp(-2 \cdot \alpha^2/n).$$

Aufgabe 5 (Aufgabe 4 im Tutorium für 1. Semester)
Es ergibt sich

$$P(|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq 50) \leq 2\exp(-2 \cdot 50^2/1000) = 2\exp(-5) \approx 0.0135.$$