Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 07.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

4. Tutorium

Im Zentrum dieses Tutoriums stehen die Tschebyscheff-Markoffschen Ungleichungen und weiterhin die Hoeffdingsche Ungleichung für binomialverteilte Zufallsvariablen.

Satz 1. (**Tschebyscheff-Markoff Ungleichungen**)
Sei X eine Zufallsvariable, $q > 0$ und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$P(\{|X| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^q} \cdot \mathrm{E}\,|X|^q\,.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen lassen sich unter anderem Wahrscheinlichkeiten für große Abweichungen vom Erwartungswert abschätzen.

Ist X aber beispielsweise binomialverteilt, liefert die Hoeffdingsche Ungleichung im allgemeinen bessere Abschätzungen für solche Wahrscheinlichkeiten.

Satz 2. (**Hoeffdingsche Ungleichung**) *Sei X binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in]0,1[$. Dann gilt*

$$P\left(\{|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha\}\right) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \alpha^2/n).$$

für alle $\alpha > 0$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 1.

Aufgabe 2. Sei Y eine $B(1000, 0.5)$-verteilte Zufallsvariable. Wenden Sie Satz 1 mit $q = 2$ an, um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq 50\})$$

zu finden.

Für den Beweis von Satz 2 ist folgendes Lemma nützlich.

Lemma 1. *Sei $r \geq 0$, $p \in]0,1[$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$(1 - p + p\exp(r))^n \leq \exp\left(rnp + nr^2/8\right).$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie Lemma 1. Verwenden Sie dazu eine Taylorentwicklung der Funktion $L(r) = n\ln(1 - p + p\exp(r))$, $r \geq 0$ bis zur Ordnung 2.

Aufgabe 4. Beweisen Sie Satz 2. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(1) Leiten Sie mit Hilfe von Satz 1 zuerst eine von $r \geq 0$ abhängige Abschätzung für $P(\{X - \mathrm{E}(X) \geq \alpha\})$ her.

(2) Verwenden Sie danach Lemma 1 und minimeren Sie den erhaltenen Ausdruck über $r \geq 0$.

Aufgabe 5. Wenden Sie nun Satz 1 an, um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq 50\})$$

aus Aufgabe 2 zu finden. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 2.