Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 31.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

3. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Normalverteilte Zufallsvariablen)
Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Die Zufallsvariable Z sei unabhängig von X und diskret verteilt mit

$$P(Z = +1) = P(Z = -1) = 1/2.$$

Dann ist die Zufallsvariable $Y = Z \cdot X$ standardnormalverteilt. Es gilt nämlich aufgrund der Unabhängigkeit von X und Z

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X \leq y | Z = 1) \cdot P(Z = 1) + P(X \geq -y | Z = -1) \cdot P(Z = -1) \\ &= \frac{1}{2} P(X \leq y) + \frac{1}{2} P(X \geq -y) \\ &= \frac{1}{2} (\Phi(y) - (1 - \Phi(-y))) = \Phi(y). \end{aligned}$$

(Die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable wird hier mit $\Phi(\cdot)$ bezeichnet.) Also sind X und Y zwei standardnormalverteilte Zufallsvariablen. **Aber:**

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} &P(X + Y = 0) \\ &= P(X(1 + Z) = 0 | Z = 1) \cdot P(Z = 1) + P(X(1 + Z) = 0 | Z = -1) \cdot P(Z = -1) \\ &= P(2X = 0 | Z = 1) \cdot P(Z = 1) + P(Z = -1) = P(Z = -1) = 1/2 \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $X + Y$ nicht normalverteilt.

(ii) Annahme: (X, Y) normalverteilt. Dann existieren nach Definition unabhängige iid $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_m$, eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,m}$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \cdot U + c.$$

Daraus ergibt sich, daß auch $X + Y$ normalverteilt ist, da sich $X + Y$ als

$$X + Y = \sum_{i=1}^{m} (a_{1,i} + a_{2,i}) U_i + c_i$$

darstellen lässt, und $U_1, \ldots, U_m$ unabhängig iid $N(0, 1)$-verteilt sind. Widerspruch zu (i)!

Aufgabe 2 (Normalverteilte Zufallsvariablen)
Wir interessieren uns für den Abstand zwischen den Aufenthaltsorten von Elster und Amsel, der im dreidimensionalen Raum durch

$$\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

gegeben ist. Die Zufallsvariablen $X_1 - X_2$, $Y_1 - Y_2$ und $Z_1 - Z_2$ sind nach Folgerung 1, S. 82 (Lehn/Wegmann) normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 169. Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Zufallsvariablen sind auch die drei durch Differenz gebildeten Zufallsvariablen voneinander unabhängig. Daher ist

$$\Big(\frac{X_1 - X_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Y_1 - Y_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Z_1 - Z_2}{13}\Big)^2$$

als Summe von drei quadrierten, unabhängigen, identisch $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen χ_3^2-verteilt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man damit:

$$\begin{aligned}
&P(\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} > 9.9) \\
&= P((X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 > 98.01) \\
&= P\Big(\Big(\frac{X_1 - X_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Y_1 - Y_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Z_1 - Z_2}{13}\Big)^2 > \frac{98.01}{169}\Big) \\
&= 1 - P\Big(\underbrace{\Big(\frac{X_1 - X_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Y_1 - Y_2}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{Z_1 - Z_2}{13}\Big)^2}_{\sim\chi_3^2} \leq \underbrace{0.58}_{\chi^2_{3;0.1}}\Big) \\
&= 1 - 0.1 = 0.9 \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Cauchy-Verteilung)

(1) Es gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}(\arctan(b) - \arctan(a)).$$

Da weiterhin $\lim_{b\to\infty} \arctan b = \pi/2$ and $\lim_{a\to-\infty} \arctan a = -\pi/2$ ist, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

(2) Es gilt

$$\mathrm{E}\,|X| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

Da

$$\int_0^b \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln\big(1+b^2\big) - \ln(1) = \ln\big(1+b^2\big)$$

ist, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln\big(1+b^2\big) = \infty.$$

(3) Die Verteilungsfunktion einer Cauchy-verteilten Zufallsvariablen ist durch

$$F(y) = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2}, \qquad y \in \mathbb{R}$$

gegeben.
(i) Sei $a, b \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dann gilt

$$P(a \leq Y \leq b) = P(a \leq \arctan(X) \leq b) = P(\tan(a) \leq X \leq \tan(b))$$

Da X Cauchy-verteilt ist, folgt

$$P(a \leq Y \leq b) = P(\tan(a) \leq X \leq \tan(b)) = \frac{b-a}{\pi},$$

für $a, b \in [-\pi/2, \pi/2]$.
(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt weiterhin

$$P(a \leq Y \leq b) = P\left(\tan(\max\{a, -\pi/2\}) \leq X \leq \tan(\min\{b, \pi/2\})\right),$$

also ist $Y = \arctan(X)$ eine $R([-\pi/2, \pi/2])$-verteilte Zufallsvariable.