Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 10.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

2. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit)

Beim einfachen Münzwurf kann man $\Omega = \{1, 2\}$ wählen, wobei 1 Wappen und 2 Zahl entspreche. Als σ–Algebra $\mathfrak{A}$ bietet sich die Potenzmenge von Ω an. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P sei durch die Laplace–Annahme definiert, d.h.

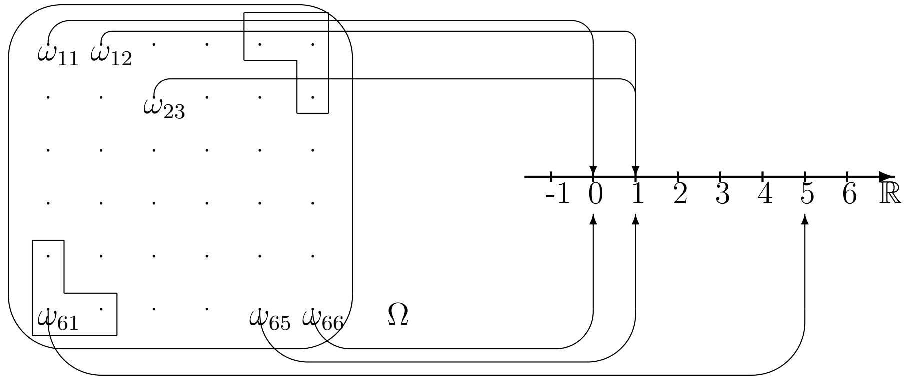
$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} \quad C \in \mathfrak{A} \quad .$$

1. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = B = \{1\}$ ergibt sich
$$P(A|B) + P(A^C|B) = 1 + 0 \neq \frac{1}{2} = P(B) \quad .$$
Die Behauptung ist richtig für $P(B) = 1$ (siehe b)).
2. RICHTIG:
$$\begin{aligned} P(A|B) + P(A^C|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A^C \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P((A \cup A^C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad . \end{aligned}$$
Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \emptyset$.
3. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = B = \{1\}$ ergibt sich
$$P(A|B) + P(A|B^C) = 1 + 0 \neq \frac{1}{2} = P(A) \quad .$$
4. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1\}$ ergibt sich:
$$P(A|B) + P(A|B^C) = 1 + 1 \neq 1 \quad .$$
5. RICHTIG:
$$\begin{aligned} P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = P(A \cup B|C) \end{aligned}$$
Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen Satz 2.4 (v).

6. FALSCH. Aus $A \cap B = \emptyset$ kann wegen $P(\emptyset) = 0$ nur dann Unabhängigkeit (also $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$) folgen, wenn $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$ gilt.
   Gegenbeispiel: Für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ ergibt sich:
$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0 = P(A \cap B) \quad .$$
   $A \cap B = \emptyset$ bedeutet: „A und B sind unvereinbar.“
7. FALSCH. Gegenbeispiel: siehe f). $A \neq B$ bedeutet: „A und B sind verschieden.“
8. RICHTIG:
   A, B unabhängig $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad .$$
   A, B unabhängig $\Leftarrow P(A|B) = P(A)$:
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \quad .$$
9. nur RICHTIG, wenn P durch die Laplace–Annahme definiert ist, da dann wg. h) gilt:
$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = P(A|B) = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad .$$

Aufgabe 2 (Zufallsvariablen)

1. Z: Augenzahl des schwarzen Würfels
   S: Summe der Augenzahlen
   X: Betrag der Differenz der Augenzahlen der beiden Würfel
2. $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Q(\omega_{ij}) = 14 - i - j$
   $T : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $T(\omega_{ij}) = \max\{i, j\}$
3. $\{X \geq 4\} = \{\omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{26}, \omega_{51}, \omega_{61}, \omega_{62}\}$
$$P(\{X \geq 4\}) = \frac{|\{X \geq 4\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
4.



   Die sechs eckig umrandeten Punkte stellen die Menge $\{X \geq 4\}$ dar.

5. (i) Eine Zufallsvariable X ordnet nicht jedem Ereignis $A \in \mathfrak{A}$, sondern jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl zu.
(ii) Der Wertebereich einer Zufallsvariablen X muß nicht auf $[0, 1]$ beschränkt sein, sondern ganz $\mathbb{R}$ ist zugelassen.

Aufgabe 3 (Modellierung eines Zufallsexperiments)
(i) mit den Abkürzungen J=Junge und M=Mädchen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{JJ, JM, MJ, MM\} \\
&\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega) \\
&P \text{ ist Gleichverteilung auf } \Omega
\end{aligned}$$

(ii) Unter Beachtung der Disjunktkeit der Ereignisse folgt:

$$P(\{JJ, JM, MJ\}) = P(JJ \cup JM \cup MJ) = P(JJ) + P(JM) + P(MJ) = \frac{3}{4}$$

(iii)

$$P(JJ|\{JJ, MJ, JM\}) = \frac{P(JJ)}{P(\{JJ, JM, MJ\})} = \frac{1}{3}$$

(iv) Der Wahrscheinlichkeitsraum muss verändert werden: Aus der Tatsache, dass uns ein Junge die Tür öffnet, können wir nämlich nicht ableiten, ob dieser Junge das erste oder zweite der beiden Kinder ist. Unser neuer Ereignisraum sieht demnach wie folgt aus:

$$\Omega = \{J_T J, J J_T, J_T M, J M_T, M_T J, M J_T, M_T M, M M_T\},$$

wobei J_T bzw. M_T der Junge bzw. das Mädchen ist, welcher/s die Tür öffnet.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(\{J_T J, J J_T\}|\{J_T J, J J_T, J_T M, M J_T\}) = \frac{P(\{J_T J, J J_T\})}{P(\{J_T J, J J_T, J_T M, M J_T\})} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$