Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 10.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

2. Tutorium

Aufgabe 1 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A,\ B,\ C \in \mathfrak{A}$. Überlegen Sie, ob die nachstehenden Aussagen im allgemeinen richtig oder falsch sind. Beweisen Sie die richtigen Aussagen und geben Sie für die falschen ein Gegenbeispiel (etwa beim einfachen Münzwurfexperiment) an. Nennen Sie gegebenenfalls zusätzliche Voraussetzungen, unter denen die entsprechende Aussage wahr ist. Es sei vorausgesetzt, daß bei den auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten der Nenner von 0 verschieden ist.

Richtig oder falsch?

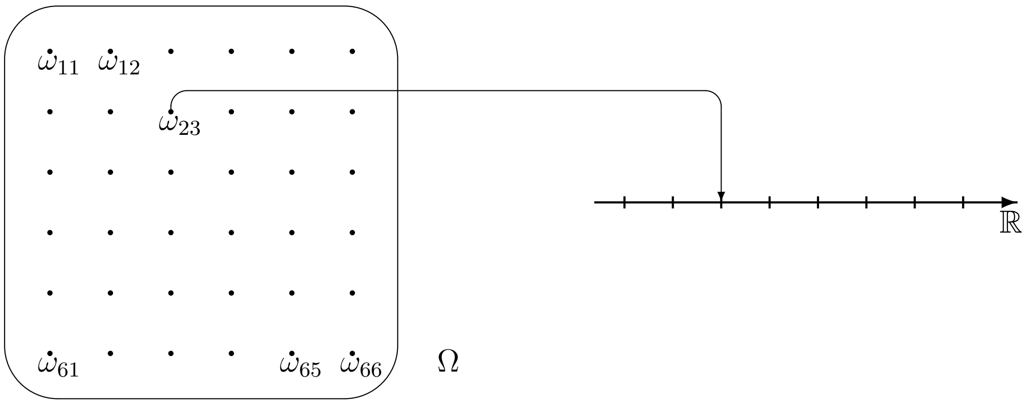
1. $P(A|B) + P(A^C|B) = P(B)$
2. $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$
3. $P(A|B) + P(A|B^C) = P(A)$
4. $P(A|B) + P(A|B^C) = 1$
5. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
6. „A und B sind unabhängig“ ist gleichwertig zu $A \cap B = \emptyset$
7. „A und B sind unabhängig“ ist gleichwertig zu $A \neq B$
8. „A und B sind unabhängig“ ist gleichwertig zu $P(A|B) = P(A)$
9. „A und B sind unabhängig“ ist gleichwertig zu $|A \cap B|/|B| = |A|/|\Omega|$

Aufgabe 2 (Zufallsvariablen)

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments soll der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\Omega = \{\omega_{ij} : 1 \leq i, j \leq 6\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ für $A \in \mathfrak{A}$ verwendet werden. Das Ergebnis ω_{ij} bedeute dabei: der weiße Würfel zeigt Augenzahl i und der schwarze Augenzahl j.

Die Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Y(\omega_{ij}) = i$ beschreibt die Augenzahl des weißen Würfels. Außerdem seien die Zufallsvariablen $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Z(\omega_{ij}) = j$, $S : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $S(\omega_{ij}) = i + j$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega_{ij}) = |i - j|$ gegeben.

1. Was beschreiben die Zufallsvariablen Z, S und X ?
2. Geben Sie die Abbildungsvorschrift der Zufallsvariablen Q und T an, wenn Q die Summe der beiden verdeckten (unten liegenden) Augenzahlen angibt und T die größere der beiden Augenzahlen.
   (Hinweis: Bei handelsüblichen Spielwürfeln addieren sich die Augenzahlen gegenüberliegender Seiten zu 7, dies soll auch hier vorausgesetzt werden.)

3. Geben Sie das Ereignis $\{X \geq 4\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 4\}$ in aufzählender Form an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Ereignis eintritt. Für diese Wahrscheinlichkeit sind verschiedene Schreibweisen möglich:
   $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 4\})$, $P(\{X \geq 4\})$, $P(X \in [4, \infty)\,)$ oder $P(X \geq 4)$.
4.
   

   Mit dieser Skizze soll die Zufallsvariable X veranschaulicht werden.
   Beschriften Sie die Zahlengerade $\mathbb{R}$, verbinden Sie die beschrifteten $\omega \in \Omega$ durch einen Pfeil mit ihrem jeweiligen Bild $X(\omega)$ und tragen Sie das Ereignis $\{X \geq 4\}$ ein.
5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Warum sind die folgenden Aussagen im allgemeinen nicht richtig? Korrigieren Sie!
   (i) Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ eine reelle Zahl zu.
   (ii) Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung $X : \Omega \to [0, 1]$.

Aufgabe 3 (Modellierung eines Zufallsexperiments)
In einem Experiment sollen Familien mit zwei Kindern hinsichtlich der Geschlechterkombinationen der zwei Kinder untersucht werden. Wir nehmen an, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Kind, ein Mädchen bzw. ein Junge zu sein, jeweils gleich 0.5 ist.
Das Experiment besteht darin, eine Familie (mit zwei Kindern) zufällig auszuwhlen.

(i) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesem Zufallsexperiment zugrunde liegt!

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Familie einen Jungen hat?

In einem weiteren Experiment werden nur Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen zumindest eines ein Junge ist.

(iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß auch das zweite Kind ein Junge ist?

In einem dritten Experiment (es werden wieder nur Familien mit zwei Kindern betrachtet), besuchen wir eine dieser Familien. Die Tür wird uns von einem Jungen geöffnet.

(iv) Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß auch das andere Kind ein Junge ist? Überlegen Sie zuerst, wie sich der Ergebnisraum für das dritte Experiment im Vergleich zu den vorangegangenen ändert!