Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 26.04.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

1. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Lagemaßzahlen)

1. Sei $p_1, \ldots, p_n$ die Meßreihe der Punktzahlen und $m_1, \ldots, m_n$ die Meßreihe der zugehörigen Noten. Dann ergibt sich:

$$\bar{p} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} p_i = \frac{899}{20} = 44.95,$$

was einer Note von 3.7 entspricht. Die den Punktzahlen entsprechenden Noten sind:

5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.3	4.3	4.0	3.7
3.3	3.3	3.0	3.0	2.7	1.3	1.0	1.0	1.0	1.0

Daraus ergibt sich das arithmetische Mittel

$$\bar{m} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} m_i = 3.345 \quad .$$

2. Der Median $\tilde{p}$ ist der 10. Wert der geordneten Meßreihe, also $\tilde{p} = p_{(10)} = 42$, was der Note 3.7 entspricht. Für den Median $\tilde{m}$ ergibt sich dagegen 3.3 als der 10. Wert der (aufsteigend!) geordneten Meßreihe.
Ist f eine monoton wachsende Funktion, so gilt für die formulierte Transformation stets $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. Im Falle einer monoton fallenden Funktion gilt diese Beziehung lediglich bei ungeradem Stichprobenumfang; bei geradem n gilt wie in der vorliegenden Aufgabe $\tilde{y} = f(x_{([n/2])+1})$.

3. Für $\alpha = 0.2$ ergibt sich $n\alpha = 4$ und damit $k = 4$. Gemäß den Definitionen in der Aufgabe erhält man:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{0.2} &= \frac{1}{20-8}\Big(x_{(5)} + \ldots + x_{(16)}\Big) \\
&= \frac{512}{12} = 42.67 \\
w_{0.2} &= \frac{1}{20}\Big(4x_{(5)} + x_{(5)} + \ldots + x_{(16)} + 4x_{(16)}\Big) \\
&= \frac{884}{20} = 44.2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Lineare Transformation einer Meßreihe)

1. (2) $\Rightarrow$ (1) :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ax_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

   (1) $\Rightarrow$ (2) : Wir zeigen, daß f differenzierbar mit konstanter Ableitung ist. Sei $x \in \mathbb{R}$. Anwendung von (1) für $n = 2$ liefert für alle $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}2h) - f(\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}\cdot 0) \\ &= \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2h) - \frac{1}{2}f(2x) - \frac{1}{2}f(0) \\ &= \frac{1}{2}(f(2h) - f(0)). \end{aligned}$$

   Da f in 0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(f(2h) - f(0)) = f'(0).$$

   Somit ergibt sich

$$f(x) = f'(0)\cdot x + f(0).$$

2. Die gesuchte Transformation ist

$$f(x) = \frac{x - \overline{x}}{s_x},$$

   wie man durch Nachrechnen leicht beweist.

Aufgabe 3 (Lagemaßzahlen)

1. $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$, $f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = nx \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \end{aligned}$$

   $f''(x) = 2n > 0 \quad \Rightarrow \quad$ globales Minimum bei $x = \bar{x}$

2. $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - x|$

OBdA sei $x_1, \ldots, x_n$ die geordnete Meßreihe. Für festes $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt im Falle $x_k \leq x \leq x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - x_1) + \ldots + (x - x_k) + (x_{k+1} - x) + \ldots + (x_n - x) \\ &= kx - \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i - (n-k)x \\ &= (2k - n)x + C_k \end{aligned}$$

mit der Konstanten $C_k = -\sum\limits_{i=1}^{k} x_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i$.

g ist also linear auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$, und zwar:

(a) für $k < \frac{n}{2}$ streng monoton fallend,

(b) für $k > \frac{n}{2}$ streng monoton wachsend,

(c) für $k = \frac{n}{2}$ konstant.

(i) Betrachten wir nun zuerst den Fall, daß n gerade ist. Da g stetig (!) ist, erhält man

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) \ \geq \ C_{\frac{n}{2}}.$$

Weiterhin ist hier $\tilde{x} = x_{\frac{n}{2}}$. Da somit

$$g(\tilde{x}) = g(x_{\frac{n}{2}}) = C_{\frac{n}{2}}$$

ist, folgt die Behauptung.

(ii) Sein nun n ungerade. Betrachtet man obige Vorbetrachtung noch einmal genauer, ist g hier

(a) für $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ streng monoton fallend,

(b) für $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ streng monoton wachsend.

Aufgrund der Stetigkeit von g folgt somit

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) \ \geq \ g(x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}).$$

Da nun aber $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$ und $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ ist, folgt die Behauptung.