Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 26.04.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

1. Tutorium

Aufgabe 1 (Lagemaßzahlen)
Bei einer Klausur mit 10 Aufgaben wurden maximal 100 Punkte vergeben. In der folgenden Tabelle ist zu jeder Note die Punktzahl p vorgegeben, die zum Erhalt dieser Note mindestens erreicht werden mußte.

Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	4.3	5.0
p	66	63	60	57	54	51	48	45	42	39	33	0

Folgende Punktzahlen wurden von den 20 Teilnehmern erreicht:

8	16	18	22	29	32	33	33	39	42
45	46	48	50	53	64	71	79	82	89

1. Bestimmen Sie jeweils im Sinne der Bildung des arithmetischen Mittels die durchschnittliche Punktzahl und die Durchschnittsnote. Welche Note würde man bei durchschnittlicher Punktzahl erhalten?
2. Bestimmen Sie den Median der Notenverteilung und vergleichen Sie mit der Note, die man beim Median der Punkteverteilung erhalten würde. Diskutieren Sie kurz, bei welchen Transformationen $y_i = f(x_i), i = 1, \ldots, n$, einer Meßreihe $x_1, \ldots, x_n$ für die Mediane $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ gilt.
3. Weitere Beispiele von Lagemaßzahlen sind das α-*gestutzte Mittel* $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1}{n-2k}(x_{(k+1)} + \ldots + x_{(n-k)})$$

und das α-*winsorisierte Mittel* $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$

$$w_\alpha = \frac{1}{n}(kx_{(k+1)} + x_{(k+1)} + \ldots + x_{(n-k)} + kx_{(n-k)}) \quad ,$$

wobei k die größte ganze Zahl $\leq n\alpha$ bezeichnet.
Berechnen Sie das 20%-gestutzte Mittel sowie das 20%-winsorisierte Mittel der Punktzahlen.

Aufgabe 2 (Lineare Transformation einer Meßreihe)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in 0.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz von

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$\text{Es existieren } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = a \cdot x + b \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

b) Gegeben sei eine Meßreihe $x_1, \ldots, x_n$. Bestimmen Sie f so, daß die durch f transformierte Meßreihe $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, das arithmetische Mittel $\overline{y} = 0$ und die empirische Varianz $s_y^2 = 1$ besitzt (*Standardisierung einer Meßreihe).*

Aufgabe 3 (Lagemaßzahlen)
Gegeben sei eine Meßreihe $x_1, \ldots, x_n$ mit dem arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und dem Median $\tilde{x}$. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|.$$

Man zeige:

1. f hat an der Stelle $x = \bar{x}$ ein globales Minimum.
2. g hat an der Stelle $x = \tilde{x}$ ein globales Minimum.