Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 05.07.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

11. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Fehler 1. Art und Fehler 2. Art)

1. Einen Fehler 1. Art kann man nur begehen, falls
   [x] $\theta \in \Theta_0$ gilt.
   [ ] $\theta \in \Theta_1$ gilt.
2. Falls $\theta \in \Theta_0$ gilt, so führt Verwerfen von H_0 zu
   [ ] einer richtigen Entscheidung,
   [x] einem Fehler 1. Art,
   [ ] einem Fehler 2. Art,
   und Nichtverwerfen von H_0 führt zu
   [x] einer richtigen Entscheidung.
   [ ] einem Fehler 1. Art.
   [ ] einem Fehler 2. Art.
3. Eine Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist gegeben durch
   [x] $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K)$ mit $\theta \in \Theta_0$.
   [ ] $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K)$ mit $\theta \in \Theta_1$.
   [ ] $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_0$.
   [ ] $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_1$.
   Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art hängt also
   [x] davon ab, welches $\theta \in \Theta_0$ vorliegt.
   [ ] davon ab, welches $\theta \in \Theta_1$ vorliegt.
   [ ] gar nicht von θ ab.
4. Einen Fehler 2. Art kann man nur begehen, falls $\theta \in \Theta_1$ gilt. In diesem Fall führt Verwerfen von H_0 zu einer richtigen Entscheidung, während Nichtverwerfen von H_0 zu einem Fehler 2. Art führt. Eine Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist gegeben durch $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_1$. Sie hängt also davon ab, welches $\theta \in \Theta_1$ vorliegt.

Aufgabe 2 (Signifikanz-Niveau)

a),c) Die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art betragen höchstens α, d.h.

$$P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K) \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

Daher ist

$$P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K) = 1 - P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K) \geq 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

b),d) Über die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 2. Art, also über $P_\theta((X_1,\ldots,X_n)\notin K)$ mit $\theta\in\Theta_1$ ist keine Aussage möglich.

e) Es ist $\beta(\theta)=P_\theta((X_1,\ldots,X_n)\notin K)$. Aus a) und c) ergibt sich $\beta(\theta)\ge 1-\alpha$ für $\theta\in\Theta_0$. Über $\beta(\theta)$ für $\theta\in\Theta_1$ ist keine Aussage möglich.
Wegen $g(\theta)=1-\beta(\theta)$ gilt $g(\theta)\le\alpha$ für $\theta\in\Theta_0$. Für $\theta\in\Theta_1$ ist über $g(\theta)$ immer noch nichts bekannt. (Die Definitionen der OC-Funktion β und der Gütefunktion g findet man in Lehn/Wegmann, Seite 145.)

Aufgabe 3 (Vergleich zweier Tests mit Hilfe der OC-Funktion)

1. $\Theta=[0,1]$, $\quad\Theta_0=[0,0.01]$, $\quad\Theta_1=(0.01,1]$.
$X_1,\ldots,X_n$ seien unabhängig und identisch $B(1,\theta)$-verteilt, wobei $X_i=1$ bedeute: „Mikrochip i der Stichprobe ist defekt“. Bei Test A ist $n=100$, $T_A(X_1,\ldots,X_{100})=X_1+\ldots+X_{100}$ (Anzahl der Ausschußstücke) und
$$K_A=\{(x_1,\ldots,x_{100})\in\{0,1\}^{100}:\sum_{i=1}^{100}x_i>2\}.$$

2. Die OC-Funktion lautet
$$\begin{aligned}\beta_A(\theta)&=P_\theta((X_1,\ldots,X_{100})\notin K_A)\\&=P_\theta(T_A(X_1,\ldots,X_{100})\le 2)\\&=(1-\theta)^{100}+100\,\theta(1-\theta)^{99}+4950\,\theta^2(1-\theta)^{98}.\end{aligned}$$
Die letzte Gleichheit gilt, da $T_A(X_1,\ldots,X_{100})$ als Summe von unabhängigen, identisch $B(1,\theta)$-verteilten Zufallsvariablen $B(100,\theta)$-verteilt ist. Für die Gütefunktion ergibt sich
$$g_A(\theta)=1-\beta_A(\theta)=1-(1-\theta)^{100}-100\,\theta(1-\theta)^{99}-4950\,\theta^2(1-\theta)^{98}.$$

3.

θ_i	0	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.0125	0.015	0.0175	0.02
$\beta_A(\theta_i)$	1	0.998	0.986	0.96	0.921	0.870	0.810	0.745	0.677

4. Wir zeigen den Hinweis:
$$\begin{aligned}\frac{d\beta_A(\theta)}{d\theta}&=-100(1-\theta)^{99}+100(1-\theta)^{99}-100\cdot 99\,\theta(1-\theta)^{98}\\&\quad+2\cdot 4950\,\theta(1-\theta)^{98}-98\cdot 4950\,\theta^2(1-\theta)^{97}\\&=-485100\,\theta^2(1-\theta)^{97}\le 0\qquad\text{für } \theta\in\Theta.\end{aligned}$$
Also ist β_A monoton fallend in θ, und es ist $\beta_A(\theta)\ge\beta_A(0.01)=0.921>1-0.1$ für $\theta\in\Theta_0$. Also ist Test A ein Signifikanz-Test zum Niveau 0.1 (und sogar zum Niveau 0.08, wie die Rechnung zeigt).

5. Im Falle $\theta=0.02$ wird mit Wahrscheinlichkeit $\beta_A(0.02)\approx 0.67$ H_0 nicht verworfen. Das bedeutet: selbst wenn die Ausschußquote das Doppelte des Sollwerts beträgt, wird in zwei von drei Fällen keine Neueinstellung der Anlage vorgenommen. Einen solchen Fehler 2. Art wird man sicherlich als „zu hoch“ bezeichnen.

6. Nun ist $n = 1000$, $T_B(X_1, \dots, X_{1000}) = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ ist unter H_0 $B(1000, \theta)$-verteilt und

$$K_B = \{(x_1, \dots, x_{1000}) \in \{0,1\}^{1000} : \sum_{i=1}^{1000} x_i > 14\}.$$

Also ergibt sich (analog zu b)):

$$\begin{aligned} \beta_B(\theta) = P_\theta((X_1, \dots, X_{1000}) \notin K_B) & \\ &= P_\theta(T_B(X_1, \dots, X_{1000}) \leq 14) \\ &= \sum_{k=0}^{14} \binom{1000}{k} \theta^k (1-\theta)^{1000-k}. \end{aligned}$$

7. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz (Moivre-Laplace) ist

$$\beta_B(\theta) = P_\theta(T_B \leq 14) \approx (\frac{14 + 0.5 - 1000\theta}{\sqrt{1000\,\theta(1-\theta)}}) =: \beta_B^*(\theta)$$

Damit erhält man

θ_i	0	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.0125	0.015	0.0175	0.02
$\beta_B^*(\theta_i)$	1	1.000	1.000	0.995	0.924	0.715	0.448	0.235	0.107

8. Für einen „guten“ Test ist $\beta(\theta)$ möglichst groß für $\theta \in \Theta_0$ (und zwar mindestens $1-\alpha$, falls α ein vorgegebenes Signifikanz-Niveau ist) und für $\theta \in \Theta_1$ möglichst klein. Zwar ist $\beta^*(\theta)$ nur eine Approximation der exakten OC-Funktion von Test B; man kann jedoch davon ausgehen, daß $\beta_B(\theta) \geq \beta_A(\theta)$ für $\theta \in [0, \theta^*]$ (mit $\theta^* \approx 0.01$, bei exakter Rechnung ergibt sich $\theta^* < 0.01$) und $\beta_B(\theta) < \beta_A(\theta)$ für $\theta \in (\theta^*, 0.02]$ gilt. Daher ist Test B dem Test A vorzuziehen (vergleiche auch $\beta_B^*(0.02) = 0.107$ mit dem Ergebnis aus e)!).