Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 05.07.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

11. Tutorium

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_\theta, \theta \in \Theta$. Dabei sei $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ die Menge der möglichen Werte für den unbekannten Parameter θ. Es sei $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ eine Zerlegung von Θ.
Mit einem Test werde die Nullhypothese $H_0 : \theta \in \Theta_0$ gegen die Alternative $H_1 : \theta \in \Theta_1$ getestet. Die Testgröße dieses Tests werde mit $T(X_1, \ldots, X_n)$ bezeichnet, der kritische Bereich mit K ($\subseteq \mathbb{R}^n$). Bei Vorliegen einer Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird H_0 also verworfen, falls $(x_1, \ldots, x_n) \in K$.

Aufgabe 1 (Fehler 1. Art und Fehler 2. Art)

1. Einen Fehler 1. Art kann man nur begehen, falls
   - ☐ $\theta \in \Theta_0$ gilt.
   - ☐ $\theta \in \Theta_1$ gilt.
2. Falls $\theta \in \Theta_0$ gilt, so führt Verwerfen von H_0 zu
   - ☐ einer richtigen Entscheidung,
   - ☐ einem Fehler 1. Art,
   - ☐ einem Fehler 2. Art,

   und Nichtverwerfen von H_0 führt zu
   - ☐ einer richtigen Entscheidung.
   - ☐ einem Fehler 1. Art.
   - ☐ einem Fehler 2. Art.
3. Eine Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist gegeben durch
   - ☐ $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K)$ mit $\theta \in \Theta_0$.
   - ☐ $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in K)$ mit $\theta \in \Theta_1$.
   - ☐ $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_0$.
   - ☐ $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_1$.

   Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art hängt also
   - ☐ davon ab, welches $\theta \in \Theta_0$ vorliegt.
   - ☐ davon ab, welches $\theta \in \Theta_1$ vorliegt.
   - ☐ gar nicht von θ ab.
4. Formulieren Sie die zu a), b) und c) analogen Aussagen für den Fehler 2. Art.

Aufgabe 2 (Signifikanz-Niveau)
Der Test habe das Signifikanz-Niveau $\alpha \in (0, 1)$. Welche Aussage liefert Ihnen diese Kenntnis über

1. die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art?
2. die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 2. Art?
3. die Wahrscheinlichkeiten $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_0$?
4. die Wahrscheinlichkeiten $P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \notin K)$ mit $\theta \in \Theta_1$?
5. die OC-Funktion β und die Gütefunktion g des Tests?

Aufgabe 3 (Vergleich zweier Tests mit Hilfe der OC-Funktion)
Ein Hersteller von Mikrochips möchte den Anteil θ von Ausschussstücken in der Produktion überprüfen lassen ($0 \leq \theta \leq 1$). Der Sollwert für den Ausschussanteil beträgt 0.01. Um die Hypothese $H_0 : \theta \leq 0.01$ bei der Alternative $H_1 : \theta > 0.01$ zu überprüfen, wird folgender Test vorgeschlagen („Test A“): Sind in einer Stichprobe von 100 Mikrochips aus der laufenden Produktion mehr als 2 Ausschussstücke, wird H_0 verworfen, ansonsten wird nichts gegen H_0 eingewendet.

1. Geben Sie Θ, Θ_0, Θ_1 und $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ explizit an. Geben Sie außerdem die Testgröße T_A und den kritischen Bereich K_A des Tests A an.
2. Bestimmen Sie die OC-Funktion β_A und die Gütefunktion g_A des Tests A.
3. Berechnen Sie $\beta_A(\theta_i)$ für $\theta_i = i \cdot 0.0025$, $i = 0, 1, \ldots 8$, und skizzieren Sie unter Verwendung dieser Daten $\beta_A(\theta)$ für $\theta \in [0, 0.02]$. Wählen Sie als Maßstab mindestens 10 cm für 1 Längeneinheit auf der y-Achse und 5 cm für 0.01 auf der x-Achse.
4. Zeigen Sie, dass Test A ein Test zum Signifikanz-Niveau 0.1 ist.
   Hinweis: Weisen Sie zuerst die Monotonie von β_A nach.
5. Angenommen, der Ausschussanteil betrage $\theta = 0.02$, sei also doppelt so hoch wie der Sollwert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies durch den Test A nicht entdeckt wird? Kommentar?
6. Jemand schlägt vor, statt des Tests A den folgenden „Test B“ zu verwenden: Man entnimmt eine Stichprobe von 1000 Mikrochips und verwirft H_0, wenn mehr als 14 Ausschußstücke darunter sind. Dieser Test wird natürlich teurer als Test A sein, ist er dafür auch besser? – Zur Beantwortung dieser Frage soll auch die OC-Funktion β_B des Tests B untersucht werden. Geben Sie eine Formel an, mit der $\beta_B(\theta)$ exakt berechnet werden kann.
7. Bestimmen Sie $\beta_B(\theta_i)$ für die in c) beschriebenen θ_i näherungsweise. Benutzen Sie zur Vereinfachung der Rechnung nicht Ihre Formel aus f), sondern den Zentralen Grenzwertsatz mit Stetigkeitskorrektur. Zeichnen Sie β_B in Ihre Skizze aus c) ein.
8. Wie sieht die OC-Funktion β eines „guten“ Tests aus: Für welche $\theta \in \Theta$ muss $\beta(\theta)$ möglichst groß sein (und wie groß mindestens?), für welche θ möglichst klein? Vergleichen Sie unter diesen Gesichtspunkten Test A und Test B. Welchen ziehen Sie vor?