Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 28.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

10. Tutorium

Aufgabe 1 (Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und Tests)
In dieser Aufgabe wird erläutert, wie aus einem Konfidenzschätzverfahren für einen unbekannten Parameter θ ein Test für die Nullhypothese $\theta = \theta_0$ gewonnen werden kann und umgekehrt.
Dazu seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Es sei bekannt, daß die Verteilungsfunktion von X_1 zu einer Familie $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen gehört, der Parameter θ sei unbekannt. $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ sei hierbei die Menge der möglichen Parameterwerte. Außerdem sei α mit $0 < \alpha < 1$ gegeben.

1. Zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ sei ein Konfidenzintervall
$$I(X_1, \dots, X_n) = [U(X_1, \dots, X_n), O(X_1, \dots, X_n)]$$
für θ bekannt. Liegt nun eine Realisierung $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vor, so läßt sich für ein vorgegebenes $\theta_0 \in \Theta$ die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ bei der Alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$ folgendermaßen überprüfen:

   Falls $\theta_0 < U(x_1, \dots, x_n)$ oder $\theta_0 > O(x_1, \dots, x_n)$, so wird H_0 verworfen; anderenfalls wird gegen H_0 nichts eingewendet.

   Zeigen Sie, daß dieses Vorgehen ein Testverfahren zum Signifikanz-Niveau α ist.
2. In Aufgabenteil a) wurde aus einem Konfidenzschätzverfahren ein Test entwickelt. Nun gehen wir umgekehrt vor.
Sei jetzt also für jedes $\theta_0 \in \Theta$ ein Signifikanz-Test zum Niveau α bekannt, der die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ bei der Alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$ überprüft. Der kritische Bereich dieses Tests sei mit K_{θ_0} bezeichnet. Nehmen Sie an, daß
$$I(x_1, \dots, x_n) := \{\theta_0 \in \Theta : (x_1, \dots, x_n) \notin K_{\theta_0}\}$$
für jede mögliche Realisierung $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Intervall sei.
Zeigen Sie, daß das so definierte zufällige Intervall $I(X_1, \dots, X_n)$ ein Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ ist.

Aufgabe 2 (Eine Anwendung von Aufgabe 1 a))
Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig identisch $\mathrm{Exp}(\theta)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta \in \Theta := (0, \infty)$, und sei $0 < \alpha < 1$. Man kann zeigen, daß dann $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ gilt.

1. Zeigen Sie, daß durch

$$I(X_1, \ldots, X_n) = \left[\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}, \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \right]$$

   ein Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ gegeben ist.

2. Für $n = 10$ ergab sich die konkrete Stichprobe

$$0.64 \quad 0.13 \quad 0.08 \quad 0.50 \quad 1.72 \quad 1.18 \quad 0.18 \quad 0.74 \quad 2.51 \quad 0.07$$

   mit $\sum_{i=1}^{10} x_i = 7.75$. Testen Sie mit einem geeigneten Testverfahren zum Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese $H_0 : \theta = 2$ gegen die Alternative $H_1 : \theta \neq 2$.

Aufgabe 3 (Eine Anwendung von Aufgabe 1 b))
Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch R(0,θ)-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta \in \Theta := (0, \infty)$. Wiederum sei $0 < \alpha < 1$.

1. Für $\theta_0 \in \Theta$ sei ein Testverfahren für die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ bei der Alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$ gegeben mit dem kritischen Bereich

$$K_{\theta_0} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \max\{x_1, \ldots, x_n\} < \theta_0 \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } \max\{x_1, \ldots, x_n\} > \theta_0 \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

   Zeigen Sie, daß dies ein Signifikanz-Test zum Niveau α ist.

2. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

3. Für $n = 10$ ergab sich die konkrete Stichprobe

$$0.88 \quad 1.37 \quad 0.17 \quad 0.13 \quad 0.20 \quad 1.73 \quad 0.82 \quad 2.00 \quad 0.30 \quad 1.46.$$

   Berechnen Sie ein konkretes Schätzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.9$.