Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 21.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

9. Tutorium

Aufgabe 1 (Schätzer und Schätzvariable)
Richtig oder falsch? Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen:

1. Ein Schätzer ordnet einer Meßreihe $x_1, \ldots, x_n$ einen Näherungswert für $\tau(\theta)$ zu.
2. Ein Schätzer ist eine Abbildung $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
3. τ ist eine Abbildung $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
4. Für einen erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\theta)$ gilt $E_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)) = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$.
5. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Meßreihe, die als Realisierung der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ angesehen werden kann. $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei ein Schätzer. Dann gilt:

   (i) $T_n(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine reelle Zahl.
   (ii) $T_n(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Zufallsvariable.
   (iii) $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine reelle Zahl.
   (iv) $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine Zufallsvariable.

Aufgabe 2 (Maximum-Likelihood-Schätzer)
Eine Zufallsvariable X ist diskret verteilt mit

$$P_\theta(X = k) = c_\theta \cdot k^\theta \qquad \text{für} \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Dabei ist $\theta \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ein unbekannter zu schätzender Parameter und c_θ eine Normierungskonstante. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ zu einer einzelnen Beobachtung von X ist zu bestimmen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie für alle vier möglichen Werte von θ die Konstante c_θ so, dass $\sum_{k=1}^{4} c_\theta \cdot k^\theta = 1$ gilt.

b) Erstellen Sie eine Tabelle aller Wahrscheinlichkeiten $P_\theta(X = k)$.

c) Bestimmen Sie alle Maximum-Likelihood-Schätzer.

   Hinweis: Es gibt genau zwei solche Schätzer.

d) Wählen Sie einen davon aus und bestimmen Sie den Bias dieses Schätzers in Abhängigkeit von θ.

Aufgabe 3 (Maximum-Likelihood-Schätzer)
Aus Erfahrung sei bekannt, daß die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\theta > 0$ beschrieben werden kann. Das für diese Sorte passende θ schätze man aufgrund der folgenden 15 Brenndauern [in 1000 Stunden] mittels der Maximum-Likelihood-Methode:

1.530	1.173	1.832	1.075	1.539
0.998	2.083	0.693	2.529	1.603
1.325	1.487	1.298	1.743	1.432