



Einführung in die Mathematische Statistik

8. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Starkes und schwaches Gesetz der großen Zahlen)

- Starkes Gesetz der großen Zahlen: Hier gilt $P(A) = 1$ für die Menge

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n(\omega) = E(X) \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 \left| \bar{X}_n(\omega) - E(X) \right| \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Also:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 \left| \bar{X}_n(\omega) - E(X) \right| \leq \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

- Schwaches Gesetz der großen Zahlen: Hier gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(A_n^{(\varepsilon)}\right) = 1$$

für die Mengen

$$A_n^{(\varepsilon)} = \left\{ \omega \in \Omega : \left| \bar{X}_n(\omega) - E(X) \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Also:

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left| \bar{X}_n(\omega) - E(X) \right| \leq \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \varepsilon'.$$

Insbesondere ist das starke Gesetz der großen Zahlen eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß der Grenzwert einer Folge von Zufallsvariablen gleich einer bestimmten Zahl ist, während das schwache Gesetz der großen Zahlen eine Aussage über die Grenzwerte verschiedener Folgen von Wahrscheinlichkeiten ist.

Aufgabe 2 (Beispiel einer Folge, die das starke Gesetz der großen Zahlen aber nicht den zentralen Grenzwertsatz erfüllt)

1. Es ist $X_k = (-1)^{k-1} X_1$ für $k \in \mathbb{N}$ und somit folgt

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \begin{cases} X_1 & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher gilt für jedes $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_1(\omega)|}{n} = 0$$

und somit ist

$$P\left(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} = 0\right) = 1.$$

2. Wähle $x = 0$. Dann ist

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot S_n \leq 0\right) = \begin{cases} P(X_1 \leq 0) = \frac{1}{2} & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N}, \\ P(\Omega) = 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot S_n \leq 0\right)$$

nicht. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots sind nicht unabhängig; sie sind sogar linear abhängig.

Aufgabe 3 (Beispiel einer Folge, die zwar den zentralen Grenzwertsatz, aber nicht das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt)

1. Nach Folgerung 1, Seite 82 (Lehn/Wegmann) ist

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim N\left(0, \sum_{k=1}^n (2k-1)\right) = N(0, n^2) \quad (\text{Hinweis}).$$

Somit ist $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ standard-normalverteilt. Wegen $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = n^2$ und $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ gilt

$$P\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n - (\mu_1 + \dots + \mu_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}} \leq x\right) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \leq x\right) = \Phi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt wegen $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \sim N(0, 1)$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \leq \varepsilon\right) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon) - 1 < 1, \quad \text{da } \Phi(\varepsilon) < 1.$$

Die Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots sind nicht identisch verteilt.